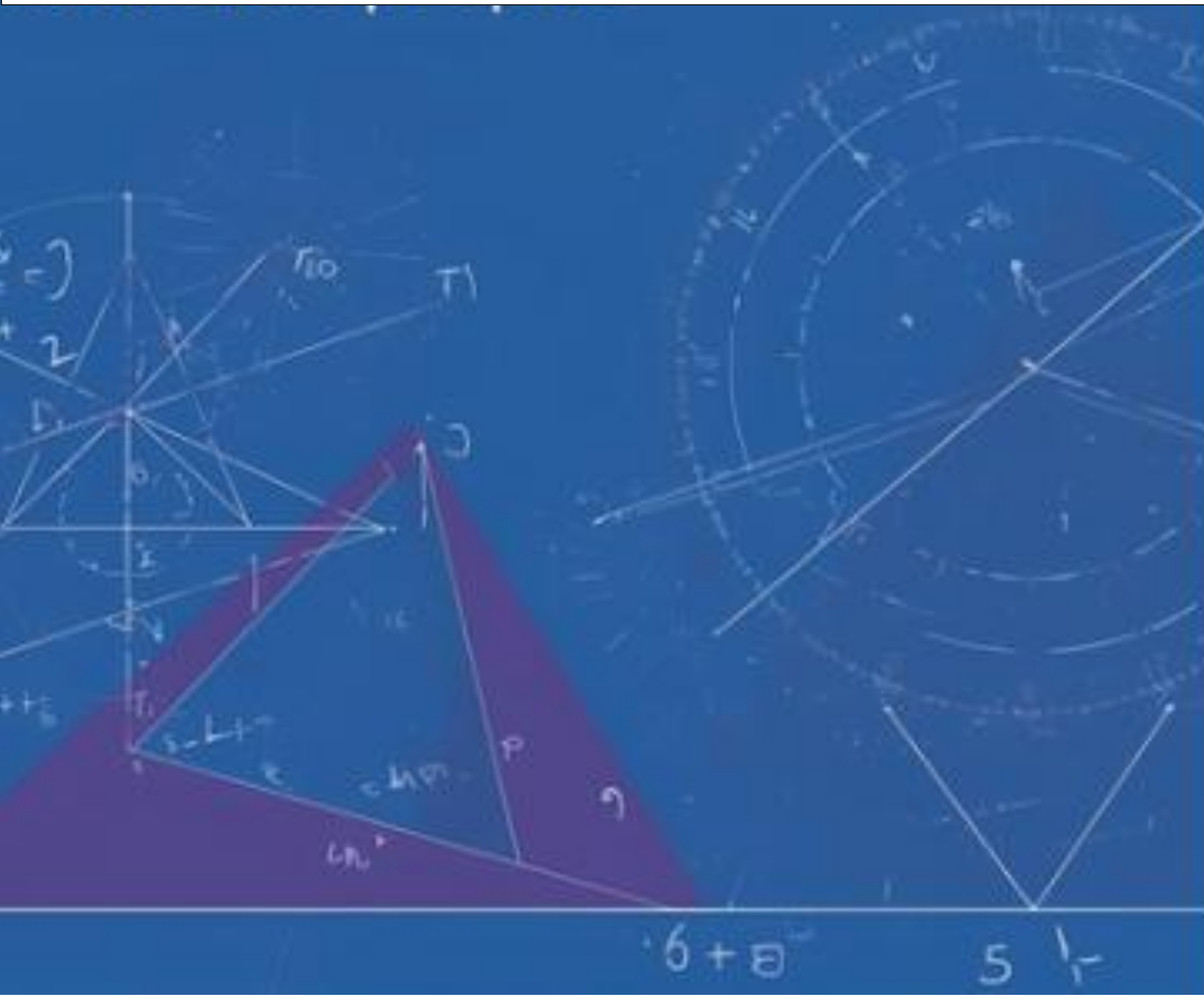
Temas Selectos de Matemáticas II
Modalidad Semiescolarizada

Faustino Vizcarra Parra

Policarpio Sicairos Avitia



Índice

Dedicatoria y agradecimientos

A nuestros queridos docentes.

Con profundo agradecimiento y admiración dedicamos este libro a aquellas y aquellos profesores excepcionales que, con su pasión por la enseñanza y su compromiso inquebrantable, han guiado la creación de estas páginas. Su dedicación a la enseñanza de la geometría y trigonometría ha iluminado el camino a otros docentes del Nivel Medio Superior (NMS) de la Universidad Autónoma de Sinaloa (UAS).

Sus enseñanzas han sido como faros de sabiduría, iluminando mentes, inspirando la curiosidad y fomentando el gusto por el aprendizaje. En este sentido, este libro es un testimonio de ese arduo trabajo y devoción, y esperamos que sea bien recibido para formar las nuevas generaciones de estudiantes. Así, su uso en el proceso de enseñanza y aprendizaje nos invita a seguir aprendiendo y creciendo como un equipo de docentes, que ven en la innovación la importancia de incorporar la inteligencia artificial (IA) como un aliado.

Tomemos en cuenta que la integración de la inteligencia artificial en el proceso de enseñanza y aprendizaje emerge como un catalizador fundamental para el desarrollo del pensamiento geométrico y trigonométrico. Al aprovechar sus capacidades, la IA puede facilitar el acceso al conocimiento, personalizar el aprendizaje, optimizar los métodos pedagógicos y evaluar los resultados. Además, el estudiante la puede utilizar como un tutor en su proceso de aprendizaje. En definitiva, se reconoce el impacto de la IA como un aliado del docente en el proceso educativo.

En agradecimiento por sembrar las semillas para el desarrollo del pensamiento matemático en las y los estudiantes del NMS de la UAS, les extendemos nuestra más sincera gratitud. Que este libro sea un tributo a su legado en la formación de mentes brillantes y pensadores en el quehacer de las matemáticas.

Colaboradores:

Nombre	UAP
Rivera Leyva José Oswaldo	Facultad de Ingeniería Culiacán
Jonathan Sánchez Rodríguez	Facultad de Ciencias de la Tierra y el Espacio
Irma del Carmen Jacobo Melo	Emiliano Zapata
Cynthia Gpe. Manjarrez Vega	Emiliano Zapata
Flavio Ixto Manjarrez Vega	Emiliano Zapata
Paloma Sandoval Gámez	C.U. Mochis
Eva Edith Verdugo Serrano	Ruiz Cortines
Aline Guadalupe Núñez Solís	San Blas, ext. Higuera de los Natochis
Juana María Armenta Trasviña	Guasave Diurna
Joel Acosta Orozco	Guasave Diurna
Claudia Edith Carrillo Castillo	Guasave Diurna
Juan Carlos Pazos Robles	Guasave Diurna
Rebeca Garay Moran	Mazatlán Diurna extensión La Noria
Oscar Mauricio Heredia Ruiz Horacio Gabriel López Ramírez	C.U. Mochis
Ramón Chávez Valenzuela	Central Diurna
Fernando Eleazar Acosta Cruz	Central Diurna
Jesús Isela Morales Higuera	Central Diurna
Eva Angelina Martínez Campaña	Central Diurna
Nadiezhda Román Valenzuela	Central Diurna
César Mendoza Becerra	Casa Blanca
Jorge Aldivar Contreras Espinoza	Casa Blanca
Lorena Leal Montoya	Casa Blanca
Nereyda Beatriz González López	Casa Blanca
César Pilar Quintero Campos	La Cruz
Martín Luna Belmar	La Cruz
Felipe de Jesús Sicairos Avitia	Navolato
Adán Meza Sánchez	Cmdte. Víctor M. Tirado
Luis Felipe Flores Tirado	Dr. Salvador Allende
Nereyda de Jesús Díaz Gustavo	8 de julio, ext. Dr. Gabino Barreda
Melesio de Jesús Sotelo Niebla	8 de julio, ext. Dr. Gabino Barreda
Alma Guadalupe Astorga Reyes	Vladimir Ilich Lenin
Izaid Santos Páez	Vladimir Ilich Lenin
Said Ulianov Verdugo Castro	Vladimir Ilich Lenin
Tammy Natalia Arellano Morales	Antonio Rosales
Eduardo Ayala Alejo	El Fuerte
Juan Antonio León López	Augusto César Sandino
Armando Antonio Beltrán Magallanes	Augusto César Sandino ext. El Diez
Melissa Garcia Carrasco	Augusto César Sandino ext. El Diez
Edgar Guadalupe Báñez Escobedo	Angostura

Haidé Aracely Gastélum	Choix

Presentación

Es un placer presentarles este libro de Temas Selectos de Matemáticas II, que ha sido cuidadosamente diseñado para acompañar a las y los estudiantes de bachillerato en su fascinante travesía por el mundo de esa maravillosa forma matemática de pensar denominada pensamiento matemático, que proporciona una base sólida y estimulante para el aprendizaje.

Así, este libro es para utilizarse en la Unidad de Aprendizaje Curricular (UAC) Temas Selectos de Matemáticas II del Recurso Sociocognitivo Pensamiento Matemático, correspondiente al quinto cuatrimestre del componente fundamental y extendido del plan de estudios de la modalidad mixta opción mixta (UAS, 2024) del Currículo del bachillerato de la Universidad Autónoma de Sinaloa 2024 que, de acuerdo con el Marco Curricular Común de la Educación Media Superior (MCCEMS) establecido por la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2023a), enfatiza el desarrollo del pensamiento matemático.

> El pensamiento matemático, según el MCCEMS, se define como:
> un Recurso Sociocognitivo que involucra diversas actividades cognitivas que van desde la ejecución de operaciones y el desarrollo de procedimientos y algoritmos hasta abarcar procesos mentales abstractos, incluida la intuición, que se dan cuando el sujeto participa del quehacer matemático al resolver problemas, usar o crear modelos, elaborar tanto conjeturas como argumentos y organizar, sustentar y comunicar sus ideas. (SEP, 2023c, p. 17)

La secuencia de este libro está basada en progresiones de aprendizaje, cada una diseñada para desarrollar sobre la anterior un pensamiento matemático; para el caso particular de esta UAC, un pensamiento variacional.

En el sentido anterior, las progresiones de aprendizaje (PA) de la UAC Temas Selectos de Matemáticas II desarrolla la geometría y la trigonometría para el logro de las metas de aprendizaje en la siguiente secuencia:

PA 1. Congruencia de triángulos.
PA 2. Semejanza de triángulos.
PA 3. Teorema de Tales.
PA 4. Razones trigonométricas y sus relaciones.
PA 5. Resolución de triángulos rectángulos.
PA 6. Aplicaciones de la trigonometría.

PA 7. Funciones trigonométricas y sus gráficas.

PA 8. Ley de senos y ley de cosenos.

Bajo esta lógica del proceso de desarrollo del pensamiento matemático, las progresiones de aprendizaje están estructuradas y secuenciadas, en el sentido de que cada una es más compleja que la anterior, de acuerdo al nivel de pensamiento matemático que demande cada progresión. Cada una de ellas, se inicia con una evaluación diagnóstica; luego, le siguen ejemplos, actividades y evaluación formativas diseñadas atendiendo a las subcategorías de las categorías del pensamiento matemático, mismas que orientan hacia el logro de las metas de aprendizaje; al final cuenta con instrumentos para la autoevaluación y coevaluación.

Además, en cada PA se consideran tres momentos claves de la evaluación: diagnóstica, formativa (mientras se aprende) y final; haciendo énfasis en la evaluación formativa en función de la retroalimentación, para que, durante el proceso de realizar las actividades de aprendizaje, las y los docentes puedan determinar el nivel de logro del estudiantado, en particular, de las metas de aprendizaje que contribuyen a los aprendizajes de trayectoria. Es decir, se utiliza la evaluación formativa como herramienta para comprender su progreso y ajustar, en consecuencia, las estrategias activas.

También, durante el proceso de aprendizaje, en cada PA se lleva a cabo la autoevaluación (A), coevaluación (C) y heteroevaluación (H); para ello, se implementa como técnica principal de evaluación, la observación, utilizando guías específicas para tal fin. Los resultados se reflejarán en la tabla que aparece al inicio de cada progresión en correspondencia con el desempeño.

Por otra parte, se sugiere usar los códigos QR (generados en parzibyte: https://parzibyte.me/apps/generador-qr/), así como la Inteligencia Artificial y las aplicaciones de celular como aliados en este proceso de aprendizaje. En cuanto a las representaciones gráficas que se incluyen, estas fueron hechas en Desmos y GeoGebra, así como las figuras en Word.

Finalmente, el desarrollar un pensamiento matemático no solo les abrirá las puertas en el aula, sino que también los acompañará a lo largo de sus vidas, dotándoles de la capacidad de enfrentar cualquier desafío con ingenio y perspicacia.

¡Adentrémonos juntos en el fascinante universo del pensamiento matemático!

Tabla de categorías, subcategorías, aprendizajes de trayectoria y metas de aprendizaje de Temas Selectos de Matemáticas II

Temas Selectos de Matemáticas II			
Categorías			
C1 Procedural	**C2** Procesos de intuición y razonamiento	**C3** Solución de problemas y modelación	**C4** Interacción y lenguaje matemático
Subcategorías			
S1 Elementos aritmético-algebraicos	**S1** Capacidad para observar y conjeturar		**S1** Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico
S2 Elementos geométricos	**S2** Pensamiento intuitivo	**S2** Construcción de modelos	**S2** Negociación de significados
S3 Elementos variacionales	**S3** Pensamiento formal	**S3** Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios	**S3** Ambiente matemático de comunicación
Aprendizajes de Trayectoria			
Valora la aplicación de procedimientos automáticos y algorítmicos, así como la interpretación de sus resultados para anticipar, encontrar y validar soluciones a problemas matemáticos, de áreas del conocimiento y de su vida personal.	Adopta procesos de razonamiento matemático tanto intuitivos como formales tales como observar, intuir, conjeturar y argumentar, para relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales,	Modela y propone soluciones a problemas tanto teóricos como de su entorno, empleando lenguaje y técnicas matemáticas.	Explica el planteamiento de posibles soluciones a problemas y la descripción de situaciones en el contexto que les dio origen empleando lenguaje matemático y lo comunica a sus pares para analizar su pertinencia.

	humanidades y de la vida cotidiana).		
Metas de Aprendizaje			
M1-C1 Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.	**M1-C2** Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.		**M1-C4** Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.
M2-C1 Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.	**M2-C2** Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieran explicación o interpretación.	**M2-C3** Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.	**M2-C4** Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno.
M3-C1 Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares.		**M3-C3** Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del pensamiento matemático, de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno.	**M3-C4** Organiza los procedimientos empleados en la solución de un problema a través de argumentos formales para someterlo a debate o a evaluación.
	M4-C2 Argumenta a favor o en contra de afirmaciones	**M4-C3** Construye y plantea posibles soluciones a	

	acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.	problemas de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno, empleando técnicas y lenguaje matemático.	

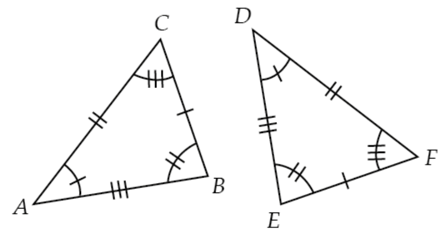
PA 1. Congruencia de triángulos

Ángulo: $\angle A$ Triángulo: Δ Congruencia: $\cong$ Segmento: $\overline{AB}$

$$\Delta ABC \cong \Delta DEF$$

Y se cumple que:

- $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$ y $\angle C \cong \angle F$
- $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ y $\overline{CA} \cong \overline{FD}$



Progresión de aprendizaje 1

Genera demostraciones de teoremas relacionados con la congruencia de triángulos.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M3-C1 Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares.	A			
	C			
	H			
M2-C2 Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieran explicación o interpretación.	A			
	C			
	H			
M3-C3 Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del pensamiento matemático, de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno.	A			
	C			
	H			
M3-C4 Organiza los procedimientos empleados en la solución de un problema a través de argumentos formales para someterlo a debate o evaluación.	A			
	C			
	H			

Evaluación diagnóstica 1.1

Analiza y selecciona la respuesta correcta a cada pregunta.

1. Si los ángulos $\angle ABC$ y $\angle DEF$ son congruentes, y la medida del ángulo $\angle ABC$ es 42°, ¿cuál es la medida del ángulo $\angle DEF$?
   a) 42° b) 48° c) 138°

2. Si el ángulo α mide 37°, ¿cuál es la medida de su ángulo suplementario β?
   a) 53° b) 143° d) 323°

3. La suma de las medidas de los ángulos interiores de cualquier triángulo es:
   a) 90° b) 180° c) 360°

4. En un triángulo isósceles, los ángulos que se encuentran opuestos a los lados congruentes son:
   a) Desiguales entre sí b) Siempre rectos c) Iguales entre sí

Triángulos congruentes

El estudio de la congruencia en geometría permite identificar figuras que, aunque puedan estar ubicadas en diferentes posiciones, tienen exactamente la misma forma y tamaño; por lo que se dice que son congruentes. La congruencia se representa mediante el símbolo ≅. Un caso particular son los triángulos congruentes, que constituyen uno de los conceptos fundamentales en la geometría euclidiana.

Imagina que tienes dos triángulos dibujados en hojas de papel separadas. Si puedes recortar uno de ellos y al colocarlo sobre el otro coinciden perfectamente, entonces estos triángulos son congruentes. Esta idea simple permite establecer relaciones entre los lados y ángulos de los triángulos congruentes como: sus ángulos correspondientes son iguales y sus lados correspondientes tienen la misma longitud.

Definición de triángulos congruentes

Dos triángulos son congruentes (se representa con el símbolo ≅) cuando tienen exactamente la misma forma y el mismo tamaño, es decir:

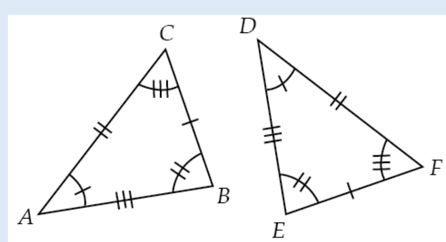
- Los ángulos correspondientes tienen la misma medida.
- Los lados correspondientes (u homólogos) tienen la misma longitud.

Si el triángulo ABC es congruente con el triangulo DEF, se escribe:

$$\Delta ABC \cong \Delta DEF$$

Y se cumple que:

- $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$ y $\angle C \cong \angle F$
- $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ y $\overline{CA} \cong \overline{FD}$



Si el ΔABC es congruente con el ΔDEF ($\Delta ABC \cong \Delta DEF$) los vértices de los dos triángulos se corresponden en el mismo orden en que las letras nombran los triángulos, es decir, $A \leftrightarrow D$ (que se lee, A corresponde a D), $B \leftrightarrow E$ y $C \leftrightarrow F$.

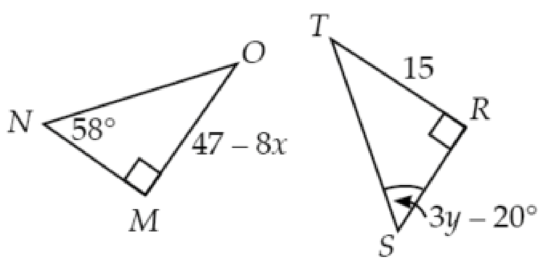
Esta correspondencia de vértices puede emplearse para nombrar los lados y ángulos correspondientes de los dos triángulos.

Ángulos correspondientes: $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$ y $\angle C \cong \angle F$

Lados correspondientes: $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ y $\overline{CA} \cong \overline{FD}$

Ejemplo formativo 1.1

1. Encuentra los valores de x y de y de tal manera que el ΔMNO sea congruente a el ΔRST.



Resolución

Puesto que el $\Delta MNO \cong \Delta RST$, entonces es válida la siguiente correspondencia:

$$\Delta MNO \cong \Delta RST$$

Esto se traduce en: $\angle M \cong \angle R$, $\angle N \cong \angle S$, $\angle O \cong \angle T$, $\overline{MN} = \overline{RS}$, $\overline{MO} = \overline{RT}$ y $\overline{NO} = \overline{ST}$.

Atendiendo los datos, elegimos:

$$\begin{aligned} \angle N &= \angle S \\ 58° &= 3y - 20° \\ 58° + 20° &= 3y \\ 78° &= 3y \\ \frac{78°}{3} &= y \\ 26° &= y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} MO &= RT \\ 47 - 8x &= 15 \\ -8x &= 15 - 47 \\ -8x &= -32 \\ x &= \frac{-32}{-8} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

El valor de y es 26° y el de x es 4 unidades.

Criterios de congruencia de triángulos

En geometría, una de las habilidades fundamentales consiste en reconocer cuándo dos figuras tienen exactamente la misma forma y tamaño, aunque estén en distinta posición. Esta propiedad se conoce como congruencia. En el caso particular de los triángulos, existen reglas específicas que permiten determinar si dos triángulos son congruentes, sin necesidad de comparar sus lados y ángulos correspondientes. Para verificarlo no es necesario hacerlo aplicando la definición, basta con aplicar uno de los siguientes criterios de congruencia:

1. Lado - Lado - Lado (LLL): los tres lados son iguales.

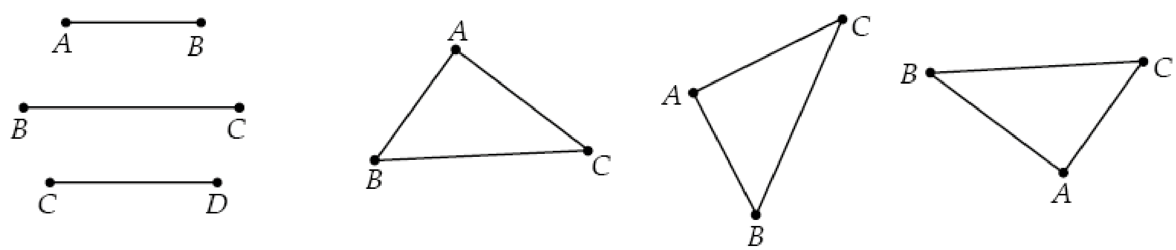
2. Lado - Ángulo - Lado (LAL): dos lados y el ángulo comprendido son iguales.
3. Ángulo - Lado - Ángulo (ALA): dos ángulos y el lado comprendido son iguales.

Además, como se demostrará más adelante, también se puede probar que dos triángulos son congruentes mediante el teorema Ángulo - Ángulo - Lado (AAL), si en estos se tiene que dos ángulos y un lado no comprendido son iguales.

Criterio de congruencia LLL

Como ya has aprendido, dos triángulos son congruentes si cada par de ángulos correspondientes son congruentes y cada par de lados correspondientes también lo son. Sin embargo, no es necesario conocer todos estos elementos para saber que dos triángulos son congruentes.

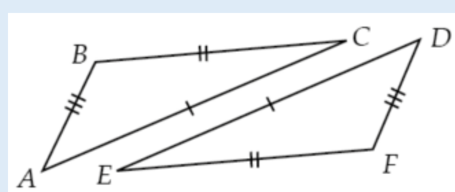
Los tres segmentos que se muestran a continuación pueden unirse para formar un triángulo. No importa el orden en que se unan los segmentos, el triángulo resultante será siempre el mismo.



El triángulo puede verse diferente, pero sigue siendo el mismo triángulo. Este hecho se expresa en el siguiente criterio.

Criterio de congruencia LLL
Si los tres lados de un triángulo son congruentes con los tres lados de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

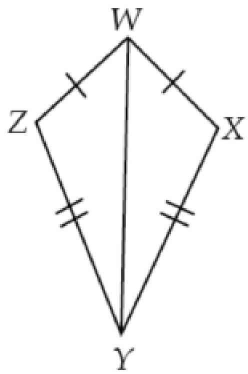
Si $\overline{AC} \cong \overline{DE}$, $\overline{AB} \cong \overline{DF}$ y $\overline{BC} \cong \overline{FE}$, entonces $\Delta BAC \cong \Delta FDE$ por criterio LLL.



Ejemplo formativo 1.2

1. Si $\overline{WZ} \cong \overline{WX}$ y $\overline{ZY} \cong \overline{XY}$, demuestra que $\Delta WZY \cong \Delta WXY$.

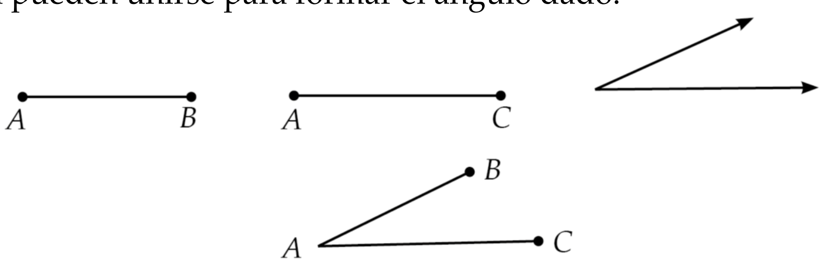
   Demostración



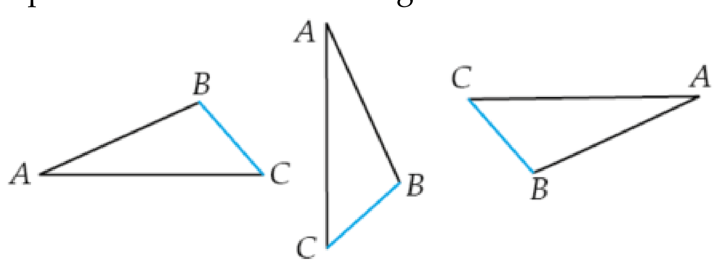
Hipótesis: $\overline{WZ} \cong \overline{WX}$ y $\overline{ZY} \cong \overline{XY}$.
Demuestra que: $\Delta WZY \cong \Delta WXY$
$\overline{WY}$ es lado común en ambos triángulos.
Y dado que $\overline{WZ} \cong \overline{WX}$ y $\overline{ZY} \cong \overline{XY}$, entonces el $\Delta WZY \cong \Delta WXY$ por el criterio LLL.

Criterio de congruencia LAL

Otra manera de verificar que dos triángulos son congruentes involucra dos lados y el ángulo comprendido entre ellos. Un ángulo comprendido es el ángulo que se forma entre dos lados consecutivos. Los dos segmentos que se muestran a continuación pueden unirse para formar el ángulo dado.



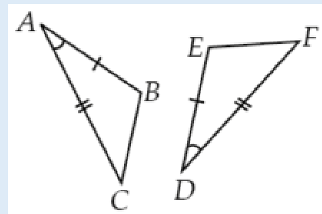
Independientemente de la posición del $\angle BAC$, para formar un triángulo, el segmento BC solo puede tener una única longitud.



Dado cualquier par de segmentos y un ángulo comprendido, es posible formar un único triángulo. Los dos lados y el ángulo comprendido determinan el tamaño y la forma del triángulo. Este hecho se establece en el siguiente criterio.

Criterio de congruencia LAL
Si dos lados y el ángulo comprendido de un triángulo son congruentes a dos lados y al ángulo comprendido de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

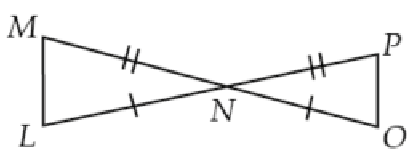
Si $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\angle A \cong \angle D$ y $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, entonces $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ por criterio LAL.



Ejemplo formativo 1.3

1. Si $\overline{LN} \cong \overline{ON}$ y $\overline{MN} \cong \overline{PN}$, demuestra que $\Delta LNM \cong \Delta ONP$.

   Demostración

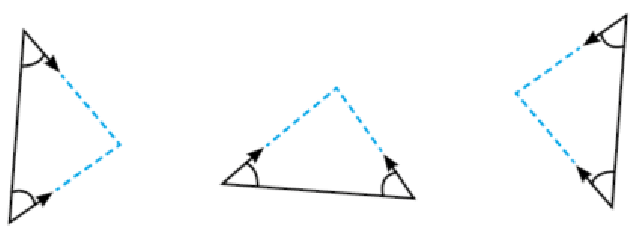


Hipótesis: $\overline{LN} \cong \overline{ON}$ y $\overline{MN} \cong \overline{PN}$.
Demuestra que: $\Delta LNM \cong \Delta ONP$.
$\overline{LN} \cong \overline{ON}$ por hipótesis.
$\angle LNM \cong \angle ONP$ por ser opuestos por el vértice.
$\overline{MN} \cong \overline{PN}$ por hipótesis.

Por lo tanto $\Delta LNM \cong \Delta ONP$ por el criterio LAL.

Criterio de congruencia ALA

Un lado incluido es un lado que es compartido por dos ángulos consecutivos. Bajo esta condición solo se puede formar un triángulo dado dos ángulos y el lado incluido.

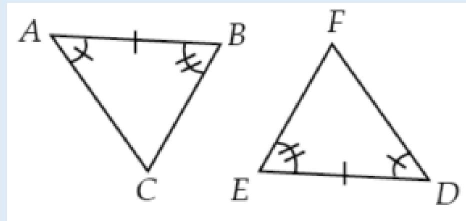


Este hecho puede utilizarse para demostrar que dos triángulos son congruentes y se enuncia en el siguiente criterio.

Criterio de congruencia ALA

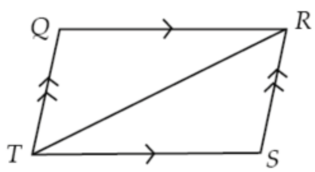
Si dos ángulos y el lado comprendido de un triángulo son congruentes con dos ángulos y el ángulo comprendido de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

Si $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$ y $\overline{AB} \cong \overline{ED}$, entonces $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ por criterio ALA.



Ejemplo formativo 1.4

1. Si $\overline{QR} \parallel \overline{ST}$, $\overline{TQ} \parallel \overline{RS}$ y $\overline{RT}$ la diagonal del paralelogramo $TQRS$, prueba que $\Delta QRT \cong \Delta STR$.



Demostración

Hipótesis: $\overline{QR} \parallel \overline{ST}$, $\overline{TQ} \parallel \overline{RS}$ y $\overline{RT}$ la diagonal del paralelogramo $TQRS$.

Demuestra que: $\Delta QRT \cong \Delta STR$.

$\angle QRT \cong \angle STR$ por ser ángulos alternos internos entre paralelas.

$\overline{TR}$ es lado común de los triangulos QRT y STR.

$\angle RTQ \cong \angle TRS$ por ser ángulos alternos internos entre paralelas.

En consecuencia el $\Delta QRT \cong \Delta STR$ por el criterio ALA.

Teorema de congruencia AAL

Para probar el teorema de congruencia AAL, primero necesitamos ver el siguiente video en el código QR 1.1, sobre la suma de los ángulos interiores de un triángulo (la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°) y luego demostrar el siguiente teorema del tercer ángulo.

QR 1.1. Demostración de la suma de los ángulos interiores de un triángulo. Video de math2me.

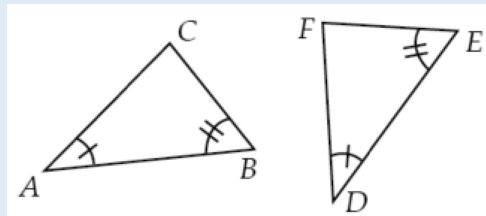
Fuente: Parzibyte, 2025.

Teorema del tercer ángulo

Si dos ángulos de un triángulo son congruentes a dos ángulos de otro triángulo, entonces el tercer ángulo de uno de los triángulos es igual al tercer ángulo del otro.

Si $\angle A \cong \angle D$ y $\angle B \cong \angle E$, entonces

$$\angle C \cong \angle F.$$



Demostración

Hipótesis: Si $\angle A \cong \angle D$ y $\angle B \cong \angle E$.

Demostrar que $\angle C \cong \angle F$.

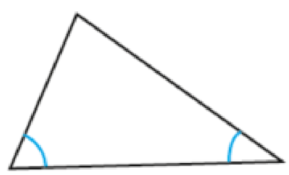
La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°, por lo que

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180° \text{ y } \angle D + \angle E + \angle F = 180°$$

De donde $\angle A + \angle B + \angle C = \angle D + \angle E + \angle F$. Sustituyendo las condiciones dadas $\angle A \cong \angle D$ y $\angle B \cong \angle E$, se tiene que $\angle A + \angle B + \angle C = \angle A + \angle B + \angle F$.

Cancelando términos, se llega a que $\angle C = \angle F$.

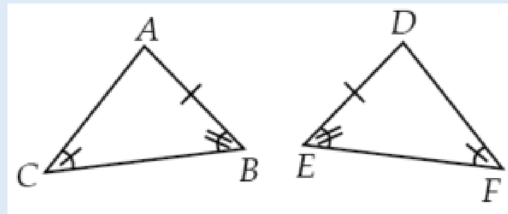
La relación de congruencia que involucra dos ángulos y un lado que no está comprendido entre ellos,



no es tan obvia ni tan fácil de visualizar como los criterios de congruencia LLL, LAL y ALA. El teorema de congruencia AAL no puede aceptarse simplemente como verdadera; debe demostrarse. Es por ello qué se enuncia como un teorema en lugar de un criterio.

Teorema de congruencia AAL o LAA
Si dos ángulos y un lado no comprendido de un triángulo son congruentes con los ángulos correspondientes y el lado de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

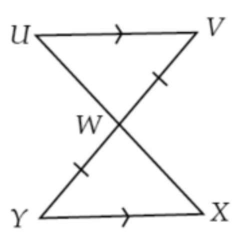
Si $\angle C \cong \angle F$, $\angle B \cong \angle E$ y $\overline{AB} \cong \overline{ED}$, entonces $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ por criterio AAL.



Demostración
Hipótesis: $\angle C \cong \angle F$, $\angle B \cong \angle E$ y $\overline{AB} \cong \overline{ED}$.
Demostrar que $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.
Dado que $\angle C \cong \angle F$ y $\angle B \cong \angle E$, esto implica que $\angle A \cong \angle D$.
De lo anterior, $\angle A \cong \angle D$, $\overline{AB} \cong \overline{ED}$ y $\angle B \cong \angle E$, entonces el $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ por el criterio de congruencia ALA.

Ejemplo formativo 1.5

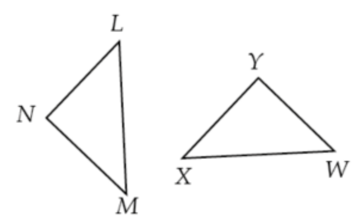
1. Si $\overline{VW} \cong \overline{YW}$ y $\overline{UV} \parallel \overline{XY}$, prueba que $\Delta UVW \cong \Delta XYW$.



Demostración
Hipótesis: $\overline{VW} \cong \overline{YW}$ y $\overline{UV} \parallel \overline{XY}$.
Demuestra que: $\Delta UVW \cong \Delta XYW$.
$\angle V \cong \angle Y$ y $\angle U \cong \angle X$ por ser ángulos alternos internos entre paralelas y dado que $\overline{VW} \cong \overline{YW}$, se tiene que el $\Delta UVW \cong \Delta XYW$ por el teorema de congruencia AAL.

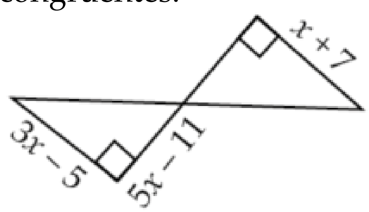
Evaluación formativa 1.1

1. Dado $\Delta LMN \cong \Delta WXY$, lista todos los pares de partes correspondientes congruentes de la derecha.



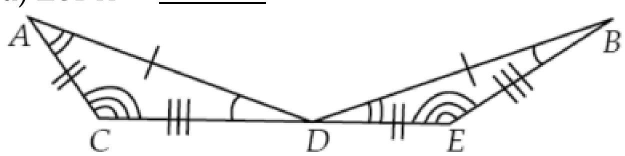
2. Dado $\Delta CAT \cong \Delta DOG$, $CA = 14$, $AT = 18$, $TC = 21$ y $DG = 2x + 7$.
   a) Dibuja y nombra una figura que muestre los ángulos congruentes.
   b) Determina el valor de x.

3. Dibuja dos triángulos que tengan las siguientes propiedades:
   a) Áreas iguales y son congruentes.
   b) Perímetros iguales y son congruentes.
   c) Áreas iguales, pero no son congruentes.
   d) No son congruentes, pero tienen el mismo perímetro.
4. Determina el valor de x de tal manera que los siguientes triángulos sean congruentes.

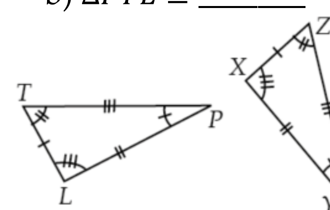


5. Completa cada proposición de congruencia:

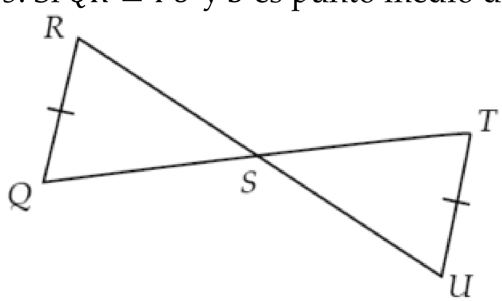
a) $\Delta CDA \cong$ _______



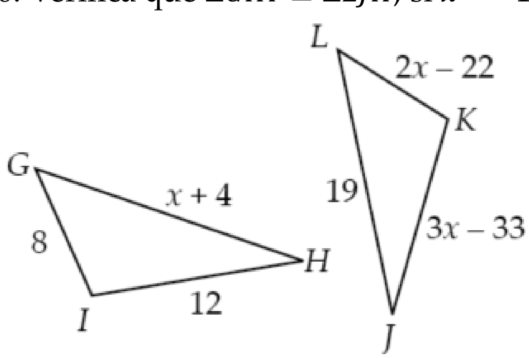
b) $\Delta PTL \cong$ _______



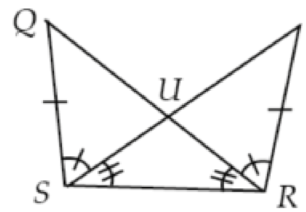
5. Si $\overline{QR} \cong \overline{TU}$ y S es punto medio de $\overline{QT}$ y $\overline{RU}$, demuestra que $\Delta QRS \cong \Delta TUS$.



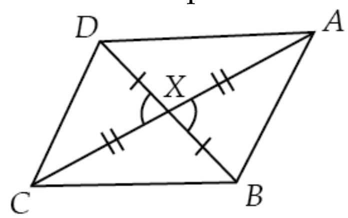
6. Verifica que $\Delta GHI \cong \Delta LJK$, si $x = 15$.



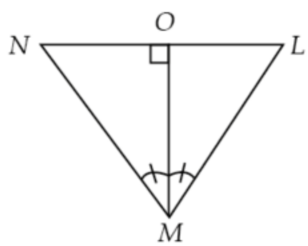
7. Si $\overline{QS} \cong \overline{TR}$, $\angle QST \cong \angle TRQ$ y $\angle TSR \cong \angle QRS$, prueba que $\Delta QRS \cong \Delta TSR$.



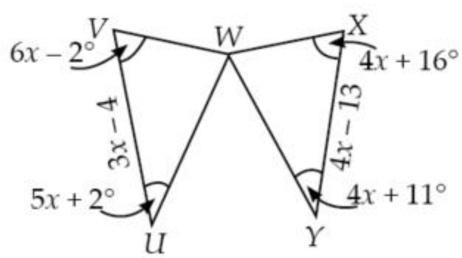
8. Si X es el punto medio de $\overline{BD}$ y de $\overline{AC}$, demuestra que $\Delta DXA \cong \Delta BXC$.



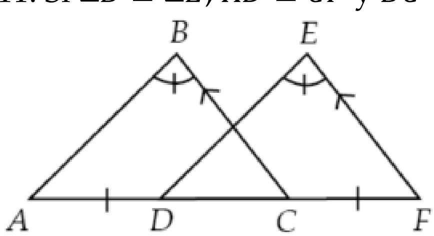
9. Si $\angle MON$ es un ángulo recto y $\angle NMO \cong \angle LMO$, prueba que el $\Delta LOM \cong \Delta NOM$.



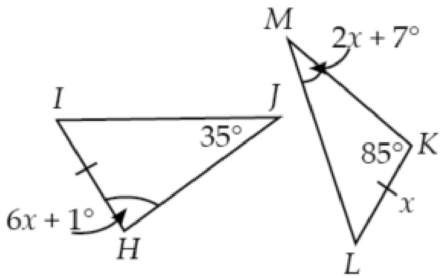
10. Dado $x = 7°$, determina si el $\Delta UVW \cong \Delta YXW$. Si no, calcula el valor de x que hace que los triángulos sean congruentes.



11. Si $\angle B \cong \angle E$, $\overline{AD} \cong \overline{CF}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$, prueba que el $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.



12. Dado que $\overline{HI} \cong \overline{KL}$ y $x = 14°$, comprueba si $\Delta HIJ \cong \Delta KLM$.



Autoevaluación y coevaluación 1.1

Nombre: ______________________ Plantel: ___________ Grupo: ____ Turno: _______

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 1. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	**En proceso de logro**	**Bueno**	**Sobresaliente**
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente a la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Empleé distintos métodos para validar la congruencia de triángulos, incluyendo herramientas tecnológicas o colaborativas. (M3-C1)			
Establecí relaciones lógicas entre las medidas de ángulos y lados en los triángulos dados. (M2-C2)			
Validé la congruencia de los triángulos aplicando los criterios de congruencia. (M3-C3)			
Justifiqué cada paso para probar la congruencia de triángulos. (M3-C4)			

Coevaluación para el aprendizaje

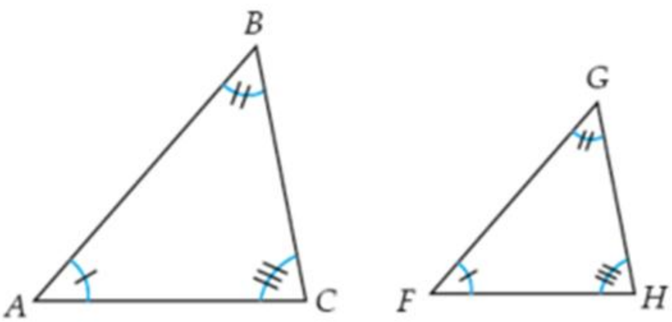
Solicita a un compañero del equipo que marque en la columna la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 1 y, que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	**En proceso de logro**	**Bueno**	**Sobresaliente**
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente a la retroalimentación de dudas de sus compañeros.			
Empleó distintos métodos para validar la congruencia de triángulos, incluyendo herramientas tecnológicas o colaborativas. (M3-C1)			
Estableció relaciones lógicas entre las medidas de ángulos y lados en los triángulos dados. (M2-C2)			
Validó la congruencia de los triángulos aplicando los criterios de congruencia. (M3-C3)			
Justificó cada paso para probar la congruencia de triángulos. (M3-C4)			

Nombre y firma de quien coevalúa

PA 2. Semejanza de triángulos

Semejanza: ~



$$\Delta ABC \sim \Delta FGH$$

$$\angle A = \angle F$$

$$\angle B = \angle G$$

$$\angle C = \angle H$$

$$\frac{BC}{GH} = \frac{AC}{FH} = \frac{AB}{FG} = k$$

Progresión de aprendizaje 2

Genera demostraciones de teoremas relacionados con la semejanza de triángulos y diseña aplicaciones prácticas de estos conceptos en campos como la arquitectura o la ingeniería.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M3-C1 Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares.	A			
	C			
	H			
M2-C2 Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieran explicación o interpretación.	A			
	C			
	H			
M3-C3 Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del pensamiento matemático, de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno.	A			
	C			
	H			
M3-C4 Organiza los procedimientos empleados en la solución de un problema a través de argumentos formales para someterlo a debate o evaluación.	A			
	C			
	H			

Evaluación diagnóstica 2.1

Analiza y selecciona la respuesta correcta a cada pregunta.

1. La razón entre dos cantidades se define como:
   a) La diferencia entre dos cantidades expresadas en unidades iguales.
   b) El producto de dos cantidades con unidades equivalentes.
   c) La relación entre dos cantidades expresadas como un cociente.

2. En el ΔABC, ¿qué lado se opone al ángulo B?
   a) $\overline{AB}$ b) $\overline{BC}$ c) $\overline{AC}$

3. ¿Qué es una proporción?
   a) Una igualdad entre dos razones.
   b) La diferencia entre dos cantidades.
   c) El resultado de multiplicar un número por otro.

4. En la proporción $\frac{10}{15} = \frac{x}{12}$, ¿cuál es el valor de x?
   a) 6 b) 8 c) 9

Semejanza de triángulos

La semejanza de triángulos es un concepto muy usado en la geometría, con aplicaciones en diversos campos de las matemáticas y en la vida cotidiana. Su estudio permite comprender cómo las figuras pueden mantener su forma, aunque varíen de tamaño. Dos triángulos son semejantes cuando tienen exactamente la misma forma, aunque pueden diferir en tamaño, como se menciona en el video del código QR 2.1.

QR 2.1. Figuras semejantes. Video del profe Daniel Carrión.
Fuente: Parzibyte, 2025.

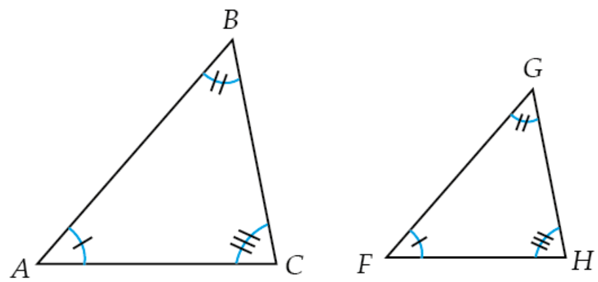
Dos triángulos son semejantes ($\Delta ABC \sim \Delta FGH$, el símbolo de semejanza es $\sim$) si cada par de ángulos correspondientes son congruentes y sus lados homólogos son proporcionales.

Cuando se dice que los ángulos de dos triángulos son congruentes, significa que tienen la misma medida. En otras palabras, en los triángulos semejantes ΔABC y ΔFGH cada par de ángulos correspondientes tienen la misma amplitud, es decir, esos ángulos son congruentes.

En los triángulos semejantes ΔABC y ΔFGH:

- El $\angle A$ se corresponde con el $\angle F$ y son congruentes $\angle A = \angle F$.
- El $\angle B$ se corresponde con el $\angle G$ y son congruentes $\angle B = \angle G$.
- El $\angle C$ se corresponde con el $\angle H$ y son congruentes $\angle C = \angle H$.

Representación de ángulos correspondientes congruentes.



Observa en la figura anterior, que el orden en el que se nombran los vértices de un triángulo en una declaración de semejanza, por ejemplo $\Delta ABC \sim \Delta FGH$, indica qué ángulos se corresponden entre sí.

En un par de triángulos semejantes, los lados homólogos son aquellos que ocupan la misma posición relativa en ambas figuras y cuya longitud mantiene una proporción constante. Los lados homólogos (o correspondientes) son los lados que se oponen a ángulos iguales.

En el ΔABC	En el ΔFGH
El lado $\overline{BC}$ se opone al $\angle A$.	El lado $\overline{GH}$ se opone al $\angle F$.
El lado $\overline{AC}$ se opone al $\angle B$.	El lado $\overline{FH}$ se opone al $\angle G$.
El lado $\overline{AB}$ se opone al $\angle C$.	El lado $\overline{FG}$ se opone al $\angle H$.

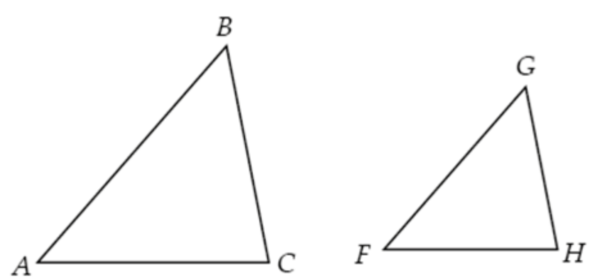
Lados homólogos.

El homólogo de $\overline{BC}$ es $\overline{GH}$.

El homólogo de $\overline{AC}$ es $\overline{FH}$.

El homólogo de $\overline{AB}$ es $\overline{FG}$.

Representación de los lados homólogos mediante la siguiente figura.



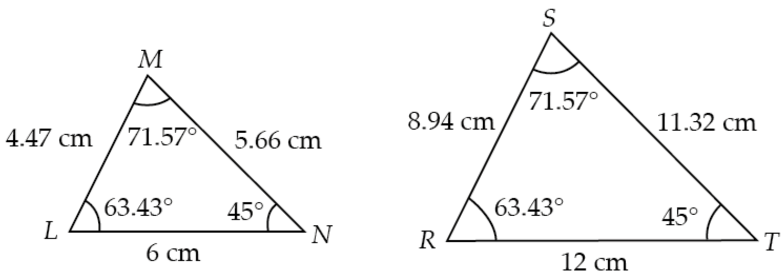
Cuando se dice que los lados homólogos de dos triángulos semejantes son proporcionales, significa que la razón entre cada par de lados correspondientes es constante. Esta razón se conoce como razón de semejanza.

Notación para indicar que los lados homólogos son proporcionales.

$$\frac{BC}{GH} = \frac{AC}{FH} = \frac{AB}{FG} = k, \text{donde } k \text{ es la razón de semejanza.}$$

Ejemplo formativo 2.1

1. Observa los siguientes triángulos.



a) Identifica los pares de ángulos correspondientes y verifica si son congruentes.
b) Identifica el lado opuesto a cada ángulo de ambos triángulos.
c) Identifica los lados homólogos y verifica que son proporcionales.
d) ¿Los triángulos son semejantes? Justifica tu respuesta.

Resolución

a) Identifica los pares de ángulos correspondientes congruentes.
Los ángulos correspondientes congruentes son:

$$\angle L = \angle R = 63.43° \qquad \angle M = \angle S = 71.57° \qquad \angle N = \angle T = 45°$$

b) Identifica el lado opuesto a cada ángulo de ambos triángulos.

En el ΔLMN	En el ΔRST
El lado $\overline{LM}$ se opone al $\angle N$.	El lado $\overline{RS}$ se opone al $\angle T$.
El lado $\overline{MN}$ se opone al $\angle L$.	El lado $\overline{ST}$ se opone al $\angle R$.
El lado $\overline{NL}$ se opone al $\angle M$.	El lado $\overline{TR}$ se opone al $\angle S$.

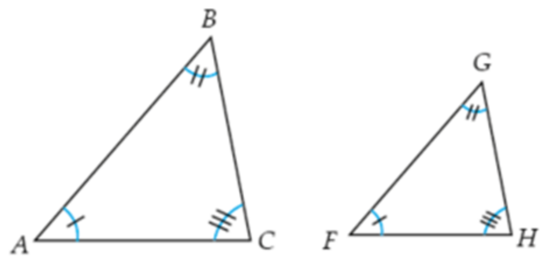
c) Identifica los lados homólogos y verifica que son proporcionales.
El homólogo de $\overline{LM}$ es $\overline{RS}$.
El homólogo de $\overline{MN}$ es $\overline{ST}$.
El homólogo de $\overline{NL}$ es $\overline{TR}$.

$$\frac{4.47}{8.94} = \frac{5.66}{11.32} = \frac{6}{12}, \text{por lo que } k = \frac{1}{2}$$

d) ¿Los triángulos son semejantes? Justifica tu respuesta.
El ΔLMN y el ΔRST son semejantes, debido a que sus ángulos correspondientes son congruentes y sus lados homólogos son proporcionales.

Triángulos semejantes

Dos triángulos son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales y sus lados homólogos son proporcionales. La semejanza se representa por el símbolo ~.



Si $\angle A = \angle F$, $\angle B = \angle G$, $\angle C = \angle H$ y

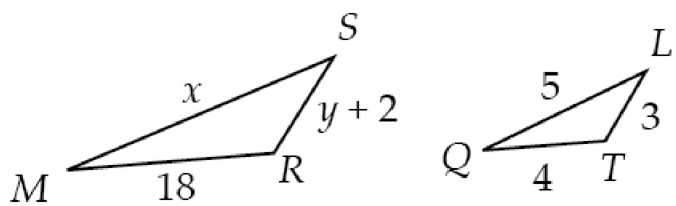
$$\frac{BC}{GH} = \frac{AC}{FH} = \frac{AB}{FG} = k,$$

entonces $\Delta ABC \sim \Delta FGH$.

Se lee: el triángulo ABC es semejante al triángulo FGH.

Ejemplo formativo 2.2

1. Si el triángulo MRS es semejante al triángulo QTL, determina los valores de x y y.



Resolución

Ya que los triángulos son semejantes, los lados homólogos son proporcionales. De este modo, puedes escribir las proporciones para encontrar los valores de x y y.

Escribe una proporción tal que involucre números y la variable x.

$$\frac{MR}{QT} = \frac{MS}{QL}$$

$$\frac{18}{4} = \frac{x}{5}$$

$$5\left(\frac{18}{4}\right) = x$$

$$22.5 = x$$

Escribe una proporción tal que involucre números y la variable y.

$$\frac{MR}{QT} = \frac{RS}{TL}$$

$$\frac{18}{4} = \frac{y+2}{3}$$

$$3\left(\frac{18}{4}\right) = y + 2$$

$$13.5 = y + 2$$

$$13.5 - 2 = y$$

$$11.5 = y$$

Criterios de semejanza de triángulos

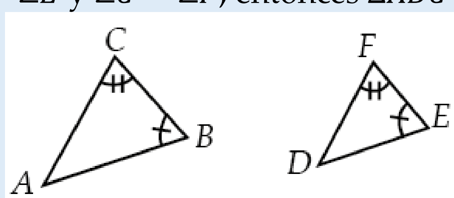
Como has aprendido, dos triángulos son semejantes si todos los pares de ángulos correspondientes son congruentes y todos los pares de lados homólogos son proporcionales. Pero, no es necesario conocer todo esto para determinar que dos triángulos son semejantes. A continuación, se presentan tres criterios de semejanza de triángulos, mediante los cuales puedes demostrar la semejanza de triángulos utilizando la menor cantidad de información posible. Para una introducción ver el video del código QR 2.2.

QR 2.2. Criterios de semejanza de triángulos. Video Susi Profe.
Fuente: Parzibyte, 2025.

Criterio de semejanza Ángulo-Ángulo (AA)

Si dos ángulos de un triángulo son congruentes a los ángulos correspondientes de otro triángulo, entonces los triángulos son semejantes.

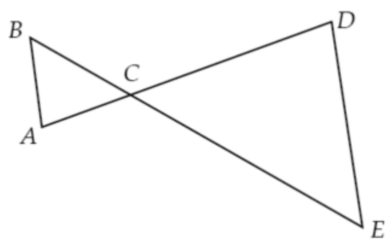
Si $\angle B = \angle E$ y $\angle C = \angle F$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.



Ejemplo formativo 2.3

1. Si $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$, demuestra que los triángulos ABC y DEC son semejantes.

   Demostración



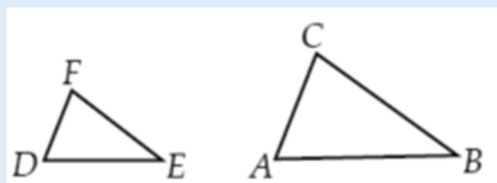
$\angle ACB = \angle DCE$ por ser opuestos por el vértice
$\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ por hipótesis
$\angle A = \angle D$ por ser alternos internos entre paralelas
Tienes que dos pares de ángulos son congruentes, así que, el $\Delta ABC \sim \Delta DEC$ por el criterio AA de semejanza.

Para ver otro ejemplo de aplicación del criterio de semejanza AA, ve el video a través del código QR 2.3.

QR 2.3. Semejanza de triángulos. Video del profe Johan.
Fuente: Parzibyte, 2025.

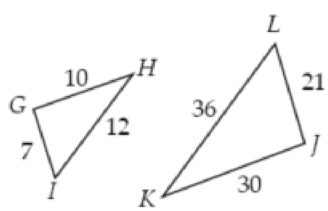
Criterio de semejanza Lado-Lado-Lado (LLL)
Si tres lados de un triángulo son proporcionales a los lados homólogos de otro triángulo, entonces los triángulos son semejantes.

$$\text{Si } \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}, \text{ entonces } \Delta ABC \sim \Delta DEF.$$



Ejemplo formativo 2.4

1. Demuestra que los triángulos GHI y JKL son semejantes.
   Demostración



Determina la razón de cada par de lados homólogos.

$$\frac{GH}{JK} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3} \qquad \frac{HI}{KL} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \qquad \frac{IG}{LJ} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$$

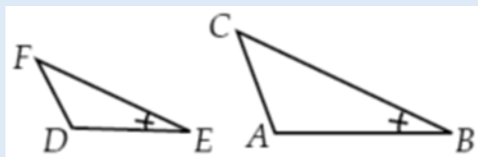
Los tres pares de lados homólogos son proporcionales, así que, el $\Delta GHI \sim \Delta JKL$ por el criterio de semejanza LLL.

Para ver otro ejemplo de aplicación del criterio de semejanza LLL, ve el video a través del código QR 2.4.

QR 2.4. Criterio de semejanza de triángulos LLL. Video Matemáticas con José Fernando.
Fuente: Parzibyte, 2025.

Criterio de semejanza Lado-Ángulo-Lado (LAL)
Si dos lados de un triángulo son proporcionales a dos lados de otro triángulo y los ángulos comprendidos entre estos lados son iguales, entonces los triángulos son semejantes.

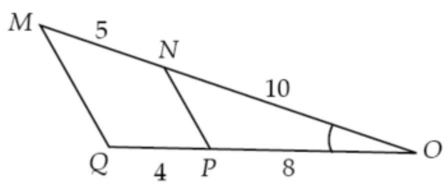
$$\text{Si } \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} \text{ y } \angle B = \angle E, \text{ entonces } \Delta ABC \sim \Delta DEF.$$



Ejemplo formativo 2.5

1. Demuestra que los triángulos PON y QOM son semejantes.

   Demostración



$\angle O$ es ángulo común

Calcula las razones de los lados homólogos.

$$\frac{NO}{MO} = \frac{10}{5+10} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \qquad \frac{OP}{OQ} = \frac{8}{4+8} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Dos pares de lados homólogos son proporcionales y los ángulos comprendidos entre ellos son congruentes, así que, por el criterio de semejanza LAL, $\Delta PON \sim \Delta QOM$.

Para profundizar sobre los criterios de semejanza ve el video a través del código QR 2.5.

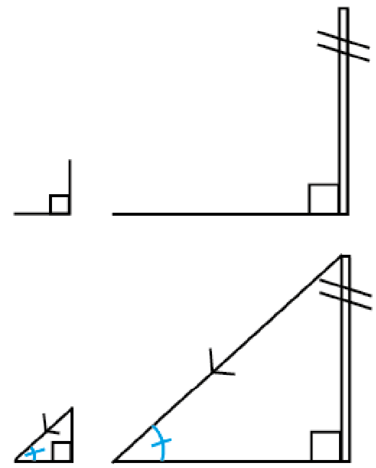
QR 2.5. Congruencia y semejanza de triángulos. Video de math2me.
Fuente: Parzibyte, 2025.

Medición indirecta de con triángulos semejantes

Método de proyección de sombras

Puede haber momentos en los que necesites conocer una longitud que no puedes medir directamente a mano. Usar triángulos semejantes para encontrar esta longitud se llama medición indirecta. Un método de medición indirecta involucra triángulos semejantes y sombras.

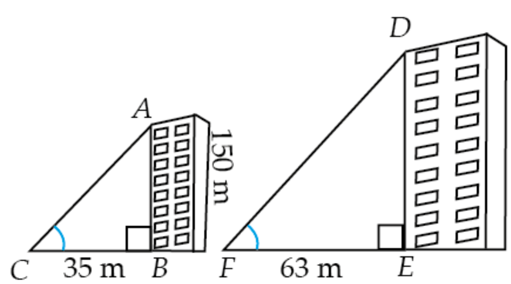
Observa el diagrama de la derecha. Sería difícil medir directamente la altura del poste telefónico a mano. Sin embargo, puedes suponer que la estaca y el poste son perpendiculares al suelo, formando un ángulo de 90°. Los rayos del sol son paralelos entre sí y forman ángulos correspondientes congruentes con respecto a la horizontal. Por lo que los triángulos formados son semejantes por el criterio de semejanza AA (ángulo-ángulo).



Puedes usar la altura de la estaca, las longitudes de las sombras y las proporciones para calcular la altura del poste telefónico.

Ejemplo formativo 2.6

1. En la siguiente figura se muestran dos edificios junto con la sombra que proyectan debido a la luz solar. Determina la altura del edificio más grande.



Resolución

Conoces:

$CB = 35, FE = 63$ y $AB = 150$.

Calcula $\overline{DE}$.

Primero demuestra que el $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Observa que los rayos del sol son paralelos entre sí y forman ángulos correspondientes congruentes con respecto a la horizontal, por lo que $\angle ACB = \angle DFE$.

Luego, $\angle CBD$ y $\angle FED$ son ángulos rectos, por lo que $\angle CBA = \angle FED$.

Así que, por criterio AA de semejanza el $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

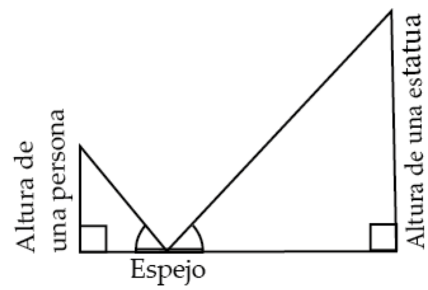
Por lo que

$$\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} \longrightarrow \frac{DE}{150} = \frac{63}{35} \longrightarrow DE = 270$$

La altura del edificio más grande es de 270 metros.

Método del espejo (reflexión)

Otro método de medición indirecta implica el uso de espejos. Si colocas un espejo entre tú y un objeto alto, se forman triángulos semejantes mediante tu línea de visión y la línea de declinación desde la parte superior del objeto, como se observa en la figura de la derecha.

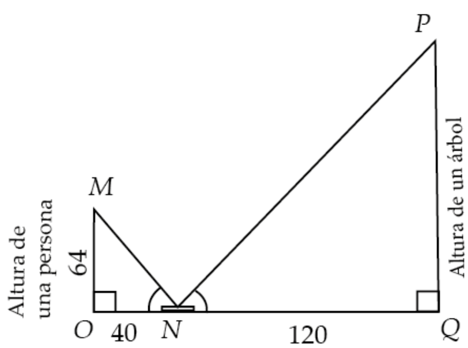


Debido a que la luz se refleja en un espejo con el mismo ángulo con el que incide en el espejo, se forma un segundo ángulo congruente correspondiente. Por lo tanto, ahora sabes que estos dos triángulos son semejantes.

Para encontrar la altura del objeto, escribe y resuelve una proporción utilizando tu altura y las distancias entre el espejo y tú, y entre el espejo y el objeto.

Ejemplo formativo 2.7

1. Una persona mide 5 pies 4 pulgadas. La distancia entre la persona y el espejo es de 3 pies 4 pulgadas, mientras que la distancia del espejo hasta la base del árbol es de 10 pies. Determina la altura del árbol. Nota: en la figura las distancias son representadas en pulgadas.



Resolución

Conoces: $MO = 64$ pulgadas, $NO = 40$ pulgadas y $NQ = 120$ pulgadas.

Calcula QP.

Primero demuestra que el $\Delta OMN \sim \Delta QPN$.

$\angle NOM = \angle NQP$ y $\angle MNO = \angle PNQ$, así que, por criterio AA de semejanza el $\Delta OMN \sim \Delta QPN$.

Por lo que

$$\frac{PQ}{MO} = \frac{NQ}{NO} \longrightarrow \frac{PQ}{64} = \frac{120}{40} \longrightarrow PQ = 192$$

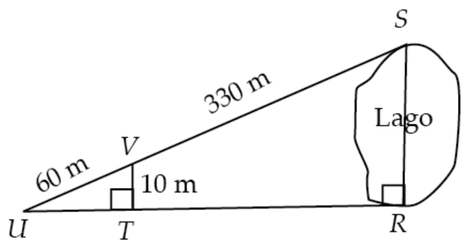
La altura del árbol es de 192 pulgadas, que equivalen a 16 pies.

Existen otros métodos para realizar medidas de forma indirecta, algunos de ellos no son tema de estudio de ninguna de las progresiones por ver; sin embargo, veremos uno en la progresión de aprendizaje siete (usando trigonometría) y otro lo veremos a continuación.

Ejemplo formativo 2.8

1. Un ingeniero hace las mediciones que se muestran en la siguiente figura, para calcular en ancho del lago. Ayúdale a calcular el ancho del lago.

Resolución



Conoces: $UV = 60$, $US = 390$ y $TV = 10$.
Calcula SR.
Primero demuestra que el $\Delta RSU \sim \Delta TVU$.
$\angle VUT = \angle SUR$ y $\angle VTU = \angle SRU$, así que, por criterio AA de semejanza el $\Delta RSU \sim \Delta TVU$.
Por lo que

$$\frac{RS}{TV} = \frac{US}{UV} \longrightarrow \frac{RS}{10} = \frac{390}{60} \longrightarrow RS = 65$$

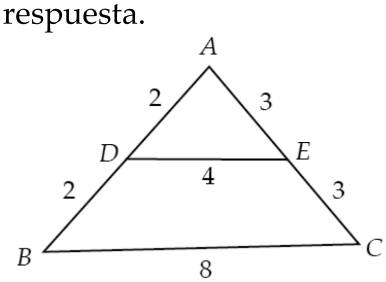
El ancho del lago es de 65 metros.

Para profundizar en la resolución de problemas de mediciones indirectas, ve el video a través del código QR 3.6.

QR 3.6. Semejanza de triángulos problemas. Video de APRENDE+.
Fuente: Parzibyte, 2025.

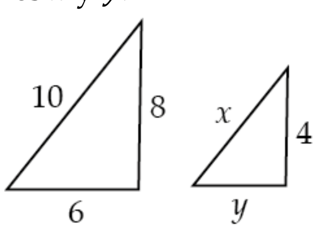
Evaluación formativa 2.1

1. Si $\overline{DE}$ y $\overline{BC}$ son paralelos ($\overline{DE} \parallel \overline{BC}$), determina si $\Delta ABC \sim \Delta ADE$. Justifica tu respuesta.

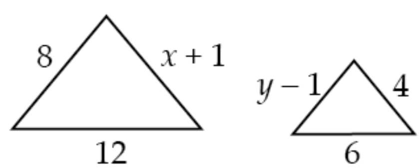


2. En cada uno de los siguientes incisos se dan triángulos semejantes y las medidas de algunos de sus lados. Determina las medidas de los lados restantes y de las variables x y y.

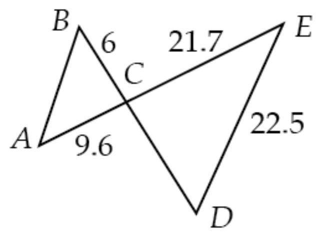
a)



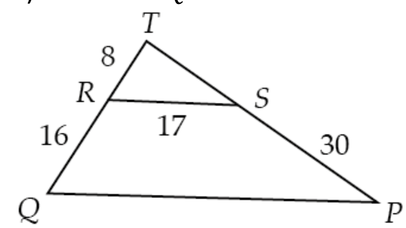
b)



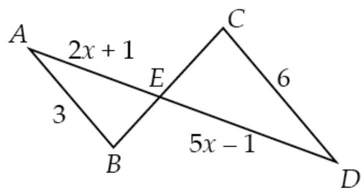
c) $\Delta ABC \sim \Delta EDC$



d) $\Delta TRS \sim \Delta TQP$



3. Si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$,determina $\overline{AE}$ y $\overline{DE}$.

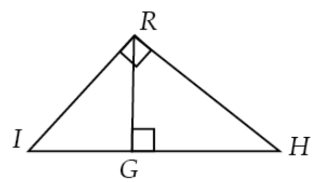


4. Explica por qué cada par de triángulos son semejantes.

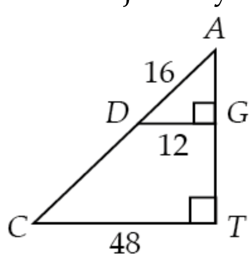
a) ΔIRH y ΔIGR

b) ΔIRH y ΔRGH

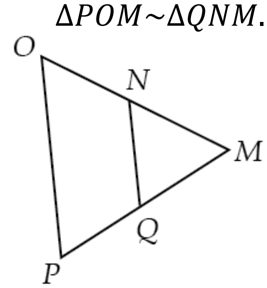
c) ΔIRG y ΔRHG



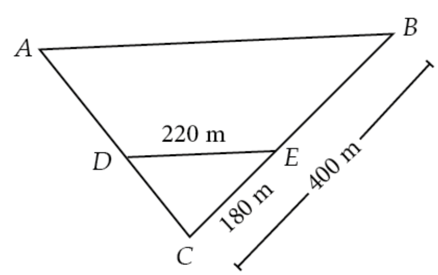
4. Explica por qué ΔCAT y ΔDAG son semejantes y calcula $\overline{CA}$.



5. Dado $\overline{NQ} \parallel \overline{OP}$, demuestra que $\Delta POM \sim \Delta QNM$.

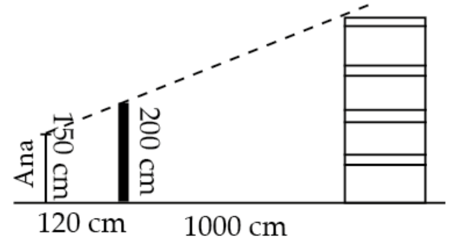


6. Se quiere calcular la longitud de $\overline{AB}$ de un terreno inestable. Para tal fin se trazan los triángulos mostrados de manera que $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$, y se obtienen las medidas indicadas en la figura de la derecha. Determina $\overline{AB}$.

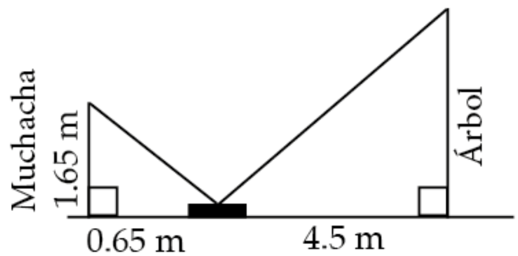


7. A 1.6 metros de un proyector se coloca un objeto de 50 cm. ¿De qué tamaño proyectará su sombra sobre una pantalla que se encuentra a 14 m del proyector?
8. La torre del campanario de una iglesia proyecta una sombra de 8.4 m y si al mismo tiempo, una persona de 1.8 m proyecta una sombra de 0.4 m, ¿cuál es la altura de la torre del campanario?
9. A cierta hora del día, una persona de 180 cm de alto, proyecta una sombra de 120 cm. En el mismo instante, un árbol proyecta una sombra de 540 cm. ¿Qué altura tiene el árbol?

10. Ana está ubicada a 120 cm de un poste vertical de 200 cm de alto. Cuando levanta la vista, puede ver la parte más alta de un edificio. Ella sabe que el edificio se encuentra a 1,000 cm del poste. Sus ojos están a 150 cm del terreno. ¿Cuál es la altura del edificio?



11. Para averiguar la altura de un árbol, una muchacha observa la parte más alta de éste en un espejo que se encuentra a 4.5 m del árbol. El espejo está en el piso, con la cara hacia arriba. La muchacha se encuentra a 0.65 m del espejo y la distancia de sus ojos al suelo es aproximadamente 1.65 cm. ¿Qué altura tiene el árbol?



Autoevaluación y coevaluación 2.1

Nombre: ______________________ Plantel: ___________ Grupo: ____ Turno: _______

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 2. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente a la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Apliqué los criterios de semejanza para demostrar la semejanza de triángulos. (M3-C1)			
Formulé conjeturas sobre la semejanza de triángulos utilizando razonamiento geométrico basado en criterios de semejanza. (M2-C2)			
Empleé lenguaje geométrico para resolver problemas de semejanza de triángulos. (M3-C3)			
Estructuré argumentos matemáticos formales para demostrar la semejanza de triángulos. (M3-C4)			

Coevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero del equipo que marque en la columna la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 2 y, que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	**En proceso de logro**	**Bueno**	**Sobresaliente**
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente a la retroalimentación de dudas de sus compañeros.			
Aplicó los criterios de semejanza para demostrar la semejanza de triángulos. (M3-C1)			
Formuló conjeturas sobre la semejanza de triángulos utilizando razonamiento geométrico basado en criterios de semejanza. (M2-C2)			
Empleó lenguaje geométrico para resolver problemas de semejanza de triángulos. (M3-C3)			
Estructuró argumentos matemáticos formales para demostrar la semejanza de triángulos. (M3-C4)			

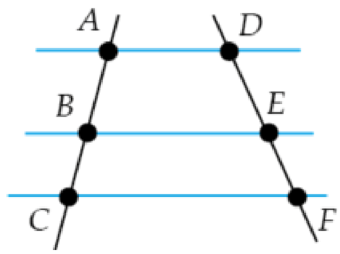
____

Nombre y firma de quien coevalúa

PA 3. Teorema de Tales

Recta AD: $\overleftrightarrow{AD}$

Si varias paralelas cortan a dos transversales, determinan entre ellas segmentos correspondientes proporcionales.



Si $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BE} \parallel \overleftrightarrow{CF}$, entonces

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} \text{ o bien } \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$$

Progresión de aprendizaje 3

Explora las implicaciones geométricas del teorema de Tales en diversos contextos, analiza cómo sus principios se aplican a problemas de semejanza y proporciones, y desarrolla aplicaciones prácticas de este teorema en situaciones reales, demostrando su utilidad en la resolución de problemas geométricos.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M1-C1 Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.	A			
	C			
	H			
M1-C2 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	A			
	C			
	H			
M4-C3 Construye y plantea posibles soluciones a problemas de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno, empleando técnicas y lenguaje matemático.	A			
	C			
	H			
M1-C4 Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.	A			
	C			
	H			

Evaluación diagnóstica 3.1

Analiza y selecciona la respuesta correcta a cada pregunta.

1. En dos triángulos semejantes, los lados homólogos deben cumplir con cierta propiedad. Si los triángulos ABC y DEF son semejantes, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?
   a) Los lados homólogos tienen la misma longitud.
   b) Los lados homólogos son proporcionales entre sí.
   c) Los lados homólogos siempre forman ángulos rectos.

2. La razón de semejanza entre dos triángulos semejantes es 2:5. Si el lado menor del triángulo más pequeño mide 8 cm, ¿cuánto mide el lado correspondiente en el triángulo más grande?
   a) 16 cm   b) 20 cm   c) 24 cm

3. ¿Cuál es el valor que satisface la proporción $\frac{5}{x} = \frac{2}{10}$?
   a) $x = 25$ b)$x = 30$ c) $x = 35$

El teorema de Tales es uno de los pilares fundamentales de la geometría euclidiana, nombrado en honor al matemático y filósofo griego Tales de Mileto (624-546 a.C.). Su importancia radica en su aplicación práctica en diversos campos como la arquitectura, la ingeniería y el arte, así como en su papel fundamental en el desarrollo posterior de la geometría.

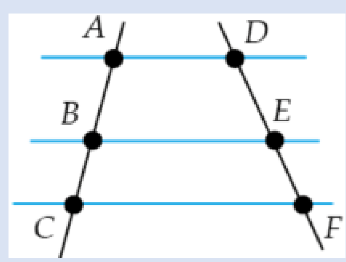
Este teorema establece una relación proporcional entre segmentos de rectas que son cortadas por un conjunto de rectas paralelas. Específicamente, cuando varias rectas paralelas son cortadas por dos rectas transversales, los segmentos determinados en una de las transversales son proporcionales a los segmentos correspondientes en la otra transversal.

Teorema de Tales

Si varias paralelas cortan a dos transversales, determinan entre ellas segmentos correspondientes proporcionales.

Si $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BE} \parallel \overleftrightarrow{CF}$, entonces

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} \text{ o bien } \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$$



Te invitamos a escanear los códigos QR 3.1 y QR 3.2, para visualizar un breve video explicativo sobre el teorema de Tales, con ejemplos prácticos que facilitarán tu comprensión sobre este importante tema. ¡No te los pierdas!

QR 3.1. El teorema de Tales |Introducción. Video del profe Alex.
Fuente: Parzibyte, 2025.

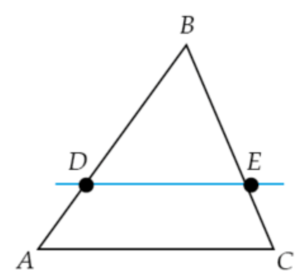
QR 3.2. El teorema de Tales |Ejercicio de aplicación 2. Video del profe Alex.
Fuente: Parzibyte, 2025

El teorema de Tales, aplicado al caso particular de los triángulos, permite establecer condiciones para la semejanza entre ellos. Cuando una recta paralela a uno de los lados de un triángulo interseca los otros dos lados, se forma otro triángulo de menor tamaño que es semejante al triángulo original. A este par de triángulos se les llama triángulos de Tales o triángulos en posición de Tales. Estos triángulos tienen un vértice común cuyos lados opuestos a este son paralelos.

Teorema 1
Si dos triángulos están en posición de Tales, entonces los ángulos correspondientes son congruentes y los lados homólogos son proporcionales.

Demostración

Sea el triángulo ABC con una recta $\overleftrightarrow{DE}$ paralela a uno de sus lados, digamos al lado $\overline{AC}$, que interseca los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en los puntos D y E, respectivamente.



Se forman dos triángulos, el ΔABC y el ΔDBE. Queremos demostrar que los triángulos ΔABC y el ΔDBE son semejantes.

Dado que $DE \parallel AC$, los ángulos $\angle BAC$ y $\angle \mathrm{BDE}$, así como $\angle BCA$ y $\angle BED$, son congruentes por ser ángulos correspondientes entre paralelas.

Esto demuestra que los triángulos ΔABC y el ΔDBE son semejantes por el criterio de semejanza de triángulos ángulo-ángulo (AA).

Lo que implica que los ángulos correspondientes de los triángulos ΔABC y ΔDBE son congruentes, y que, los lados homólogos son proporcionales:

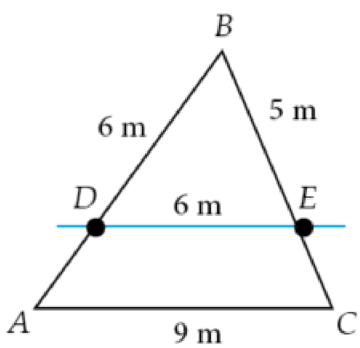
$$\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC}$$

Escanea el código QR 3.3 para ver un video con ejemplos prácticos de aplicación del teorema de Tales, donde se muestra cómo los triángulos que en esta posición de tales tienen ángulos congruentes y lados homólogos proporcionales. ¡No te lo pierdas!

QR 3.3. El teorema de Tales. Video del profesor Carreón.
Fuente: Parzibyte, 2025.

QR 3.4. El teorema de Tales| Ejercicio de aplicación 5. Video del profesor Alex.
Fuente: Parzibyte, 2025.

Para que comprendas la proporcionalidad, en la siguiente figura se traza una recta $\overleftrightarrow{AD}$ paralela al segmento $\overline{AC}$.



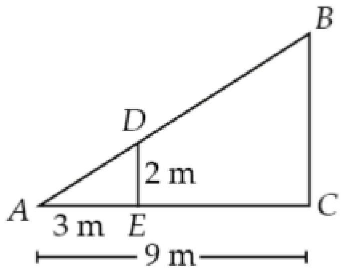
Responde las siguientes preguntas:

- ¿Qué triángulos se forman en la figura anterior?
- ¿Qué relación existe entre los lados correspondientes?
- ¿Cuál es la razón de semejanza entre los triángulos formados? Es decir, cuantas veces es más grande cada lado del triángulo ABC que su lado correspondiente en el triángulo DBE.
- ¿Cuál es la longitud de los lados faltantes?

Puedes verificar que la razón de semejanza es 9/6 = 1.5, esto significa que cada uno de los lados del triángulo ABC es 1.5 veces más grande que su lado correspondiente en el triángulo DBE.

Ejemplo formativo 3.1

1. Calcula $\overline{BC}$, si en la siguiente figura $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.



Resolución

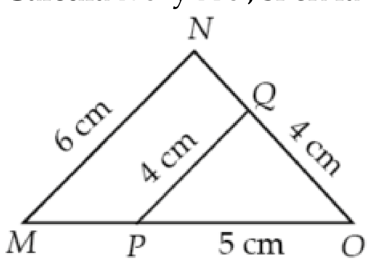
Dado que $\Delta ABC \sim \Delta ADE$ los lados homólogos son proporcionales, de donde

$$\frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AE} \longrightarrow \frac{BC}{2} = \frac{9}{3} \longrightarrow BC = 2\left(\frac{9}{3}\right) = 2(3) = 6.$$

Por lo que $BC = 6$ m.

Ejemplo formativo 3.2

1. Calcula $\overline{NO}$ y $\overline{MO}$, si en la siguiente figura $\overline{MN} \parallel \overline{PQ}$.



Resolución

Dado que $\Delta MNO \sim \Delta PQO$ los lados homólogos son proporcionales, de donde:

$$\frac{NO}{QO} = \frac{MN}{PQ} \longrightarrow \frac{NO}{4} = \frac{6}{4} \longrightarrow NO = 4\left(\frac{6}{4}\right) = 6.$$

$$\frac{MO}{PO} = \frac{MN}{PQ} \longrightarrow \frac{MO}{5} = \frac{6}{4} \longrightarrow MO = 5\left(\frac{6}{4}\right) = \frac{30}{4} = 7.5.$$

Por lo que la longitud de NO es 6 cm y la longitud de MO es 7.5 cm.

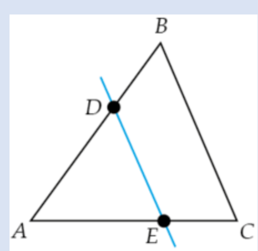
Otro teorema importante de la geometría euclidiana es el teorema de proporcionalidad en el triángulo, que establece relaciones entre los segmentos formados por rectas paralelas.

Teorema de proporcionalidad en el triángulo

Si una recta paralela a un lado de un triángulo corta a los otros dos lados en puntos distintos, entonces divide estos lados en segmentos proporcionales.

Si $\overleftrightarrow{DE}$ es paralelo a $\overline{BC}$, entonces

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$



Demostración

Sea el triángulo ABC con una recta paralela $\overleftrightarrow{DE}$ al lado $\overline{BC}$, que interseca los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ en los puntos D y E, respectivamente.

Por el teorema 1, $\Delta ABC \sim \Delta ADE$. Esto implica que sus lados homólogos son proporcionales:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

En particular

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}, \text{donde } AB = AD + DB \text{ y } AC = AE + EC$$

Por lo que

$$\frac{AD}{AD + DB} = \frac{AE}{AE + EC}$$

$$AD(AE + EC) = AE(AD + DB)$$

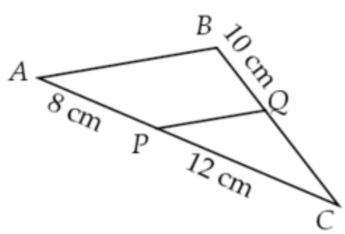
$$AD \cdot AE + AD \cdot EC = AE \cdot AD + AE \cdot DB$$

$$AD \cdot EC = AE \cdot DB$$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

Ejemplo formativo 3.3

1. Determina $\overline{QC}$, aplicando el teorema de proporcionalidad en el triángulo en la siguiente figura, en la que $\overline{AB} \parallel \overline{PQ}$.



Resolución

Dado que $\Delta ABC{\sim}\Delta PQC$ los lados homólogos son proporcionales, de donde

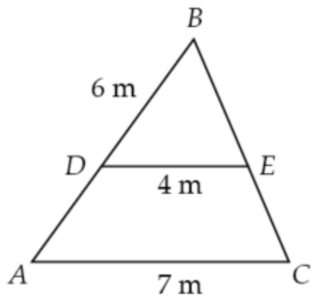
$$\frac{QC}{BQ} = \frac{PC}{AP} \longrightarrow \frac{QC}{10} = \frac{12}{8} \longrightarrow QC = 10\left(\frac{12}{8}\right) = 15.$$

Por lo que QC mide 15 cm.

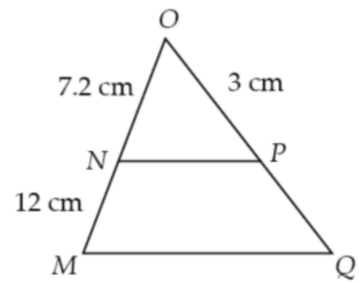
Evaluación formativa 3.1

1. Elabora un bosquejo que represente la utilización del teorema 1, para calcular la altura de un objeto inaccesible, como un árbol o un edificio
2. ¿Por qué es importante que las rectas sean paralelas en el teorema de proporcionalidad en el triángulo?
3. De los siguientes triángulos determina los lados indicados.

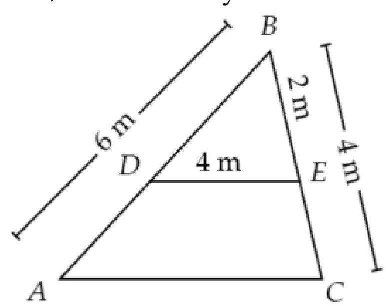
a) Si $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$, calcula $\overline{BA}$.



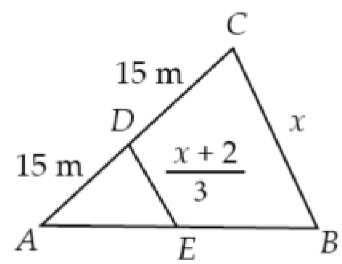
b) Si $\overline{NP} \parallel \overline{MQ}$, calcula $\overline{OQ}$.



c) Si $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$, calcula $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

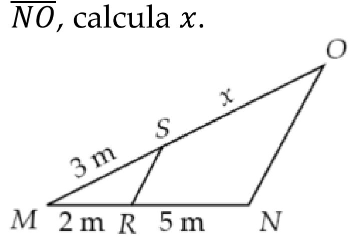


d) Si $\overline{DE} \parallel \overline{CB}$, calcula x.

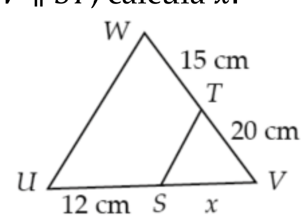


4. Calcula el valor de x que se indica en cada una de las siguientes figuras.

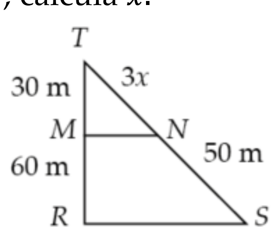
a) $\overline{RS} \parallel \overline{NO}$, calcula x.



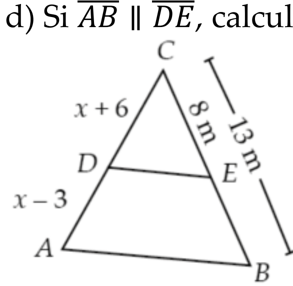
b) Si $\overline{UW} \parallel \overline{ST}$, calcula x.



c) Si $\overline{MN} \parallel \overline{RS}$, calcula x.



d) Si $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$, calcula x.



Autoevaluación y coevaluación 3.1

Nombre: ______________________ Plantel: ___________ Grupo: ____ Turno: _______

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 3. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	**En proceso de logro**	**Bueno**	**Sobresaliente**
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente a la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Calculé lados de un triángulo mediante la aplicación del teorema de proporcionalidad en el triángulo. (M1-C1)			
Identifiqué correctamente la posición de rectas paralelas y transversales en un triángulo al aplicar el teorema 1. (M1-C2)			
Justifiqué soluciones a problemas geométricos basados en el teorema 1 o en el teorema de proporcionalidad en el triángulo. (M4-C3)			
Utilicé correctamente la notación matemática para expresar relaciones de proporcionalidad en triángulos. (M1-C4)			

Coevaluación para el aprendizaje

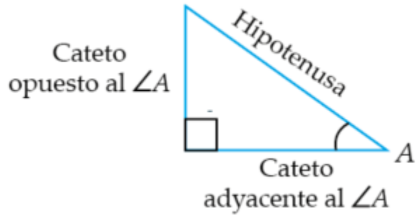
Solicita a un compañero del equipo que marque en la columna la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 3 y, que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	**En proceso de logro**	**Bueno**	**Sobresaliente**
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente a la retroalimentación de dudas de sus compañeros.			
Calculó lados de un triángulo mediante la aplicación del teorema de proporcionalidad en el triángulo. (M1-C1)			
Identificó correctamente la posición de rectas paralelas y transversales en un triángulo al aplicar el teorema 1. (M1-C2)			
Justificó soluciones a problemas geométricos basados en el teorema 1 o en el teorema de proporcionalidad en el triángulo. (M4-C3)			
Utilizó correctamente la notación matemática para expresar relaciones de proporcionalidad en triángulos. (M1-C4)			

____

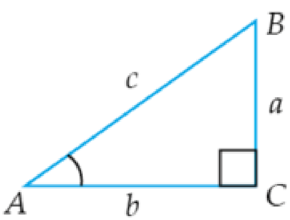
Nombre y firma de quien coevalúa

PA 4. Razones trigonométricas y sus relaciones



$$\operatorname{sen} A = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} \qquad \cos A = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}} \qquad \tan A = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}}$$

$$\csc A = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto opuesto}} \qquad \sec A = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto adyacente}} \qquad \cot A = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Cateto opuesto}}$$



$$\operatorname{sen} A = \frac{a}{c} \qquad \cos A = \frac{b}{c} \qquad \tan A = \frac{a}{b}$$

$$\csc A = \frac{c}{a} \qquad \sec A = \frac{c}{b} \qquad \cot A = \frac{b}{a}$$

Progresión de aprendizaje 4

Analiza las relaciones entre las razones trigonométricas en diversos contextos geométricos y comprueba la aplicabilidad de las relaciones entre ángulos complementarios y razones recíprocas.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M1-C1 Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.	A			
	C			
	H			
M1-C2 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	A			
	C			
	H			
M1-C4 Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.	A			
	C			
	H			

Evaluación diagnóstica 4.1

Analiza y selecciona la respuesta correcta a cada pregunta.

1. En un triángulo rectángulo, ¿cómo se le llama al lado más largo?

   a) Cateto b) Bisectriz c) Hipotenusa

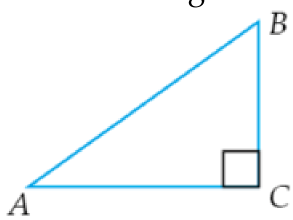
2. En el teorema de Pitágoras, $a^2 + b^2 = c^2$, ¿qué representan específicamente los términos a y b?

   a) Las longitudes de los dos lados cualesquiera de un triángulo.

   b) Las medidas de los catetos, es decir, los lados que forman el ángulo recto.

   c) La medida de la hipotenusa y uno de los catetos del triángulo.

3. Observa el siguiente triángulo.



   ¿Cuál es el ángulo recto?

   a) A b) B c) C

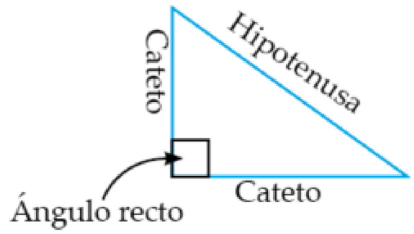
Razones trigonométricas

La trigonometría emerge como un puente entre el mundo abstracto de las matemáticas y las realidades prácticas de la medición y el espacio. Nacida de la necesidad de comprender el cielo y medir la Tierra hace miles de años, esta rama de la matemática ha evolucionado desde sus orígenes en las civilizaciones babilónica y egipcia hasta convertirse en una herramienta fundamental que sustenta campos tan diversos como la astronomía, la física, la ingeniería y la arquitectura moderna.

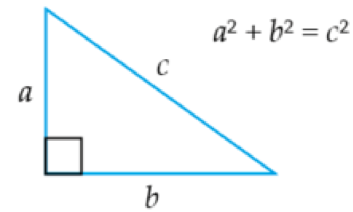
La trigonometría es la rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los ángulos y los lados de los triángulos, así como las funciones trigonométricas (seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante). Su nombre proviene del griego "trigonon" (triángulo) y "metron" (medida), literalmente "medición de triángulos".

En esta progresión se estudian las relaciones entre los ángulos y los lados del triángulo rectángulo.

Un triángulo rectángulo es un polígono de tres lados en el cual uno de sus ángulos internos mide exactamente 90° (ángulo recto). Este ángulo recto es el elemento que distingue a este triángulo de todos los demás tipos. Los dos lados que forman el ángulo recto se denominan "catetos", mientras que el lado opuesto al ángulo recto, el más largo, recibe el nombre de "hipotenusa", como se muestra en la figura de la derecha.

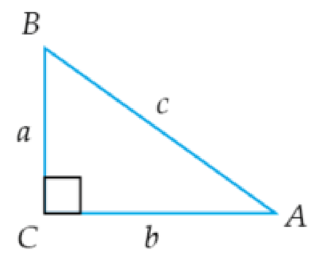


Como se observa en la imagen de la derecha, uno de los contextos más emblemáticos del teorema de Pitágoras es aquel en el que se presenta un triángulo con un ángulo recto. Este teorema establece que el cuadrado de la longitud de la hipotenusa equivale a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos, es decir, $c^2 = a^2 + b^2$.

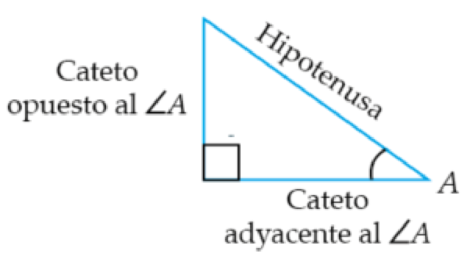


Un triángulo rectángulo, como se muestra a continuación, está compuesto por tres lados (a, b y c) y tres ángulos ($\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$) y presenta las siguientes características:

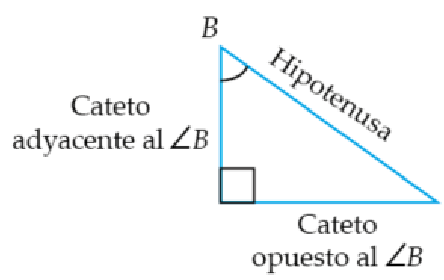
- El lado a se opone al ángulo A.
- El lado b se opone al ángulo B.
- El lado c se opone al ángulo C.
- Los ángulos A y B son agudos y son complementarios, es decir, suman 90°.
- El ángulo recto C mide 90°.



Con referencia al ángulo A, los catetos reciben el nombre de opuesto o de adyacente.

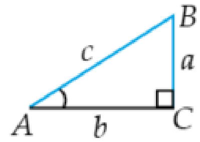


Con referencia al ángulo B, los catetos reciben el nombre de opuesto o de adyacente.



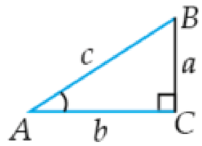
Las características particulares del triángulo rectángulo lo hacen especialmente importante en trigonometría, donde sirve como base para definir las relaciones trigonométricas fundamentales:

El seno del ángulo A es la razón entre su cateto opuesto y la hipotenusa. Se denota como sen A.



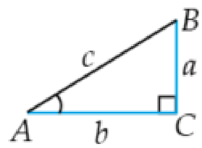
$$\text{sen } A = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$$
$$\text{sen } A = \frac{a}{c}$$

El coseno del ángulo A es la razón entre su cateto adyacente y la hipotenusa. Se denota como cos A.



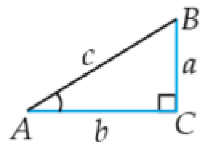
$$\cos A = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$$
$$\cos A = \frac{b}{c}$$

La tangente del ángulo A es la razón entre su cateto opuesto y su cateto adyacente. Se denota como tan A.



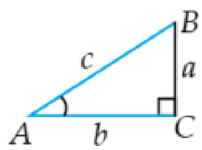
$$\tan A = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}}$$
$$\tan A = \frac{a}{b}$$

La cotangente del ángulo A es la razón entre su cateto adyacente y su cateto opuesto. Se denota como cot A.



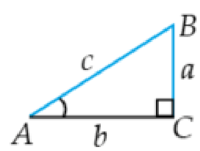
$$\cot A = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Cateto opuesto}}$$
$$\cot A = \frac{b}{a}$$

La secante del ángulo A es la razón entre la hipotenusa y su cateto adyacente. Se denota como sec A.



$$\sec A = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto adyacente}}$$
$$\sec A = \frac{c}{b}$$

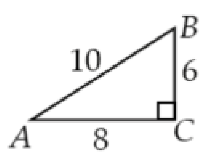
La cosecante del ángulo A es la razón entre la hipotenusa y su cateto opuesto. Se denota como csc A.



$$\csc A = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto opuesto}}$$
$$\csc A = \frac{c}{a}$$

Ejemplo formativo 4.1

1. Calcula las razones trigonométricas para los ángulos agudos del siguiente triángulo.



Resolución

Calcula las razones trigonométricas con referencia al ángulo A.

$$\text{sen } A = \frac{a}{c} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \qquad \cos A = \frac{b}{c} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \qquad \tan A = \frac{a}{b} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\csc A = \frac{c}{a} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \qquad \sec A = \frac{c}{b} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} \qquad \cot A = \frac{b}{a} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Calcula las razones trigonométricas con referencia al ángulo B.

$$\operatorname{sen} B = \frac{b}{c} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \qquad \cos B = \frac{a}{c} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \qquad \tan B = \frac{b}{a} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\csc B = \frac{c}{b} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} \qquad \sec B = \frac{c}{a} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \qquad \cot B = \frac{a}{b} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Razones trigonométricas de ángulos especiales

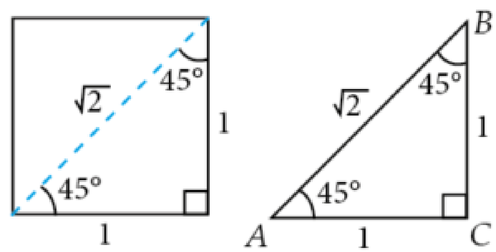
En un triángulo rectángulo, los ángulos especiales son aquellos que aparecen con frecuencia en matemáticas y tienen valores de seno, coseno y tangente que pueden expresarse de manera exacta sin usar calculadora.

Los ángulos especiales son 30°, 45° y 60°. Estos surgen de dos tipos de triángulos rectángulos:

- Triángulo rectángulo isósceles 45° - 45° - 90°.
- Triángulo rectángulo 30° - 60° - 90°.

Triángulo rectángulo isósceles 45° - 45° - 90°

Al trazar una diagonal en un cuadrado cuyo lado mide una unidad, como se muestra a la derecha, se obtienen dos triángulos congruentes de 45°- 45°- 90°, también llamados triángulos rectángulos isósceles, como se observa en la figura de la derecha.



Si cada cateto tiene una longitud de una unidad, la hipotenusa se calcula mediante el teorema de Pitágoras.

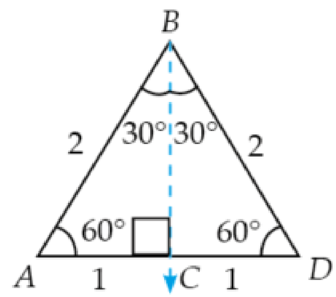
$$c^2 = a^2 + b^2 \longrightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \longrightarrow c = \sqrt{1^2 + 1^2} \longrightarrow c = \sqrt{2}\,.$$

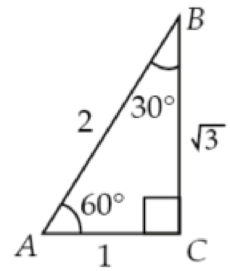
Todos los triángulos rectángulos isósceles son semejantes. En cada triángulo de 45°- 45°- 90°, los catetos son congruentes y la longitud de la hipotenusa es la $\sqrt{2}$ multiplicada por la longitud de un cateto.

El triángulo rectángulo con ángulos de 45°- 45°- 90° nos sirve para determinar las razones trigonométricas exactas del ángulo de 45°.

Triangulo rectángulo 30° - 60° - 90°

En el triángulo equilátero ΔABD de la derecha, cada ángulo mide 60°. Al trazar la bisectriz $\overrightarrow{BC}$ del ángulo $\angle ABD$, se origina el triángulo rectángulo ΔABC, cuyas medidas de sus ángulos son 30°- 60°- 90°. Si los lados del triángulo ΔABD tienen una longitud de dos unidades, puedes aplicar el teorema de Pitágoras para determinar la longitud de $\overline{BC}$.





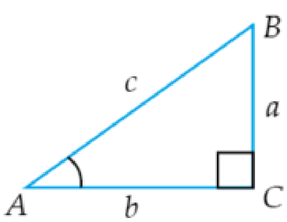
$$c^2 = a^2 + b^2 \longrightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \longrightarrow a = \sqrt{2^2 - 1^2} \longrightarrow a = \sqrt{3}.$$

Todos los triángulos de 30°- 60°- 90° son semejantes. En estos triángulos, la hipotenusa mide el doble de la longitud del cateto más corto, y el cateto más largo mide $\sqrt{3}$ multiplicada por la longitud del cateto más corto.

El triángulo rectángulo con ángulos de 30°- 60°- 90° nos sirve para determinar las razones trigonométricas exactas de los ángulos de 30° y 60°.

Razones trigonométricas de los ángulos de 0° y 90°

Existen ángulos cuyos valores de las razones trigonométricas son exactos. Estos aparecen con tanta frecuencia en situaciones problemáticas que es recomendable memorizar sus valores. Para comprender mejor las razones trigonométricas de los ángulos de 0° y 90°, analiza el siguiente triángulo rectángulo.



Basado en el ΔABC, las razones trigonométricas con respecto al ángulo A son:

$$\operatorname{sen} A = \frac{a}{c}, \quad \cos A = \frac{b}{c}, \quad \tan A = \frac{a}{b}$$

¿Qué sucede con los lados a, b y c cuando el $\angle A$ es igual a 0°? En este caso, se observa que la longitud del lado a se reduce hasta valer 0, mientras que los lados b y c adquieren la misma longitud. Ahora, imagina que el $\angle A$ aumenta hasta alcanzar 90°. En esta situación, el lado b es el que se reduce a 0, mientras que los lados a y c pasan a tener la misma longitud.

En la siguiente tabla se resumen los valores exactos de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente para los ángulos: 0°, 30°, 45°, 60° y 90°.

Razón trigonométrica	Ángulo				
	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
Seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Coseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}$	No definida

Como ya vimos, ciertos ángulos como 30°, 45° y 60° destacan por tener razones trigonométricas exactas, las cuales pueden determinarse de manera sencilla a partir de los triángulos rectángulos especiales: 45° - 45° - 90° y 30° - 60° - 90°. Conocer estas razones facilita enormemente el cálculo y simplificación de expresiones trigonométricas. A continuación, estudia cómo utilizar estos valores exactos para evaluar expresiones trigonométricas de forma exacta.

Ejemplo formativo 4.2

1. Calcula el valor numérico exacto de las siguientes expresiones trigonométricas, usando los valores exactos de las razones trigonométricas para los ángulos de 30°, 45° y 60°.

a) $\cot 45° + \operatorname{sen} 30°$

b) $\tan 45° \operatorname{sen} 30° - \cot 45° \cos 60°$

c) $\dfrac{\sec 45° \cos 60° \cot 30°}{\operatorname{sen} 30° \tan 60° \csc 45°}$

Resolución

a) $\cot 45° + \operatorname{sen} 30°$

$$\cot 45° + \operatorname{sen} 30° = 1 + \frac{1}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

b) $\tan 45° \operatorname{sen} 30° - \cot 45° \cos 60°$

$$\tan 45° \operatorname{sen} 30° - \cot 45° \cos 60° = (1)\left(\frac{1}{2}\right) - (1)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

c) $\dfrac{\sec 45° \cos 60° \cot 30°}{\operatorname{sen} 30° \tan 60° \csc 45°}$

$$\frac{\sec 45° \cos 60° \cot 30°}{\operatorname{sen} 30° \tan 60° \csc 45°} = \frac{\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}}{\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}\sqrt{2}} = 1$$

Las razones trigonométricas seno, coseno y tangente, también las puedes determinar mediante una calculadora. Escanea el código QR 4.1 para ver ejemplos.

QR 4.1. Uso correcto de la calculadora para calcular razones trigonométricas. Video del profe Alex.
Fuente: Parzibyte, 2025.

Para encontrar el ángulo cuando conocemos el valor numérico de una razón trigonométrica, utiliza las razones trigonométricas inversas: sen^{-1}, $\cos^{-1}$ y $\tan^{-1}$ (también conocidas como arcsen, arccos y arctan). Estas deshacen el efecto de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente, respectivamente, permitiendo encontrar el ángulo a partir de una razón trigonométrica dada. Estas son:

- $\text{sen}\, A = x \ \longrightarrow\ \text{sen}^{-1}(\text{sen}\, A) = \text{sen}^{-1} x \ \longrightarrow\ A = \text{sen}^{-1} x$
- $\cos A = x \ \longrightarrow\ \cos^{-1}(\cos A) = \cos^{-1} x \ \longrightarrow\ A = \cos^{-1} x$
- $\tan A = x \ \longrightarrow\ \tan^{-1}(\tan A) = \tan^{-1} x \ \longrightarrow\ A = \tan^{-1} x$

Por ejemplo, $\text{sen}\, A = 0.9063 \longrightarrow A = \text{sen}^{-1}(0.9063) \approx 64.998° \approx 65°$

Relaciones entre las razones trigonométricas de ángulos complementarios

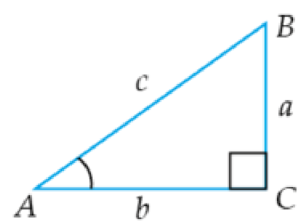
En trigonometría, las relaciones entre ángulos son importantes para resolver problemas. En particular, los ángulos complementarios representan una de las relaciones más básicas y útiles.

Dos ángulos son complementarios cuando su suma es igual a 90°. Si designamos dos ángulos como A y B, son complementarios si $A + B = 90°$.

Por ejemplo, si el ángulo $A = 30°$, su ángulo complementario $B = 60°$, dado que $A + B = 90° \longrightarrow B = 90° - A = 90° - 30° = 60°$.

De forma similar, si el ángulo $B = 25°$, entonces su ángulo complementario $A = 65°$, dado que $A + B = 90° \longrightarrow A = 90° - B = 90° - 25° = 65°$.

En el triángulo rectángulo ΔABC de la figura de la derecha, la suma de sus ángulos interiores es 180°, por lo que si el ángulo C mide 90° por ser un ángulo recto, entonces los ángulos A y B son complementarios, es decir, $A + B = 90°$.



En un triángulo rectángulo ΔABC con ángulos complementarios A y B, como el de la figura anterior, se deduce que:

- Si $\text{sen}\, A = \frac{a}{c}$ y $\cos B = \frac{a}{c}$, entonces $\text{sen}\, A = \cos B = \cos(90° - A)$.

- Si $\cos A = \frac{b}{c}$ y $\operatorname{sen} B = \frac{b}{c}$, entonces $\cos A = \operatorname{sen} B = \operatorname{sen}(90° - A)$.
- Si $\tan A = \frac{a}{b}$ y $\cot B = \frac{a}{b}$, entonces $\tan A = \cot B = \cot(90° - A)$.
- Si $\cot A = \frac{b}{a}$ y $\tan B = \frac{b}{a}$, entonces $\cot A = \tan B = \tan(90° - A)$.
- Si $\sec A = \frac{c}{b}$ y $\csc B = \frac{c}{b}$, entonces $\sec A = \csc B = \csc(90° - A)$.
- Si $\csc A = \frac{c}{a}$ y $\sec B = \frac{c}{a}$, entonces $\csc A = \sec B = \sec(90° - A)$.

A continuación, se presenta un ejemplo que ilustra cómo se vinculan estas razones trigonométricas cuando los ángulos involucrados son complementarios.

Si $\alpha = 30°$, entonces $\beta = 60°$ (son ángulos complementarios). Por lo tanto:

- $\operatorname{sen} 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$
- $\cos 30° = \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\tan 30° = \cot 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- $\cot 30° = \tan 60° = \sqrt{3}$

De lo anterior, se tiene que el valor de la razón trigonométrica de un ángulo, es igual a la co-razón del ángulo complementario. Por ejemplo, si en el triángulo rectángulo ΔABC, $\operatorname{sen} A = 0.5$ entonces $\cos B = 0.5$.

Relaciones entre las razones trigonométricas y sus razones recíprocas

En matemáticas, el recíproco de un número es un concepto que permite establecer relaciones y simplificar diversos tipos de operaciones. Por definición, el recíproco de un número distinto de cero es aquel que, al multiplicarse por el número original, da como resultado la unidad (1). Así, el recíproco de un número a se representa como $\frac{1}{a}$, siempre que $a \neq 0$.

Por ejemplo, el recíproco de 2 es $\frac{1}{2}$, ya que $(2)\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

El recíproco de $\frac{2}{3}$ es $\frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$, ya que $\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = 1$.

Este mismo concepto es fundamental en trigonometría. Por ejemplo, tu calculadora tiene teclas para el seno inverso, coseno inverso y tangente inversa. Como has visto, estas teclas están marcadas como $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ y $\tan^{-1}$. Sin embargo, no existen teclas para las inversas de la cosecante, secante y cotangente. Para determinar el ángulo θ que satisface la condición de que $\cot\theta = 0.64$, necesitas utilizar una de las identidades recíprocas.

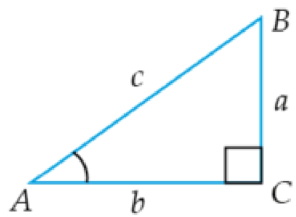
Cosecante, secante y cotangente son razones reciprocas del seno, coseno y tangente, respectivamente.

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

Es importante entender que $\sin^{-1}\theta$ es diferente de $(\sin\theta)^{-1}$. El arcoseno, o $\sin^{-1}\theta$, representa una medida de un ángulo. El recíproco del seno, o $(\sin\theta)^{-1}$, representa la razón cosecante, no una medida de un ángulo. Por ejemplo:

$$\text{Si } \cos 60° = \frac{1}{2}\text{, entonces } \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60° \text{ y } (\cos 60°)^{-1} = \frac{1}{\cos 60°} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

A continuación, veamos cómo se relaciona cada razón trigonométrica con su correspondiente recíproca, para lo cual usaremos las razones trigonométricas que se deducen de la siguiente figura.



Relación entre el seno y la cosecante.

$$\text{Si } \operatorname{sen} A = \frac{a}{c} \text{ y } \csc A = \frac{c}{a} \longrightarrow \operatorname{sen} A \cdot \csc A = \frac{a}{c}\cdot\frac{c}{a} = \frac{ac}{ca} = 1 \longrightarrow \csc A = \frac{1}{\operatorname{sen} A}$$

Relación entre el coseno y la secante.

$$\text{Si } \cos A = \frac{b}{c} \text{ y } \sec A = \frac{c}{b} \longrightarrow \cos A \cdot \sec A = \frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a} = \frac{bc}{cb} = 1 \longrightarrow \sec A = \frac{1}{\cos A}$$

Relación entre la tangente y la cotangente.

$$\text{Si } \tan A = \frac{a}{b} \text{ y } \cot A = \frac{b}{a} \longrightarrow \tan A \cdot \cot A = \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = 1 \longrightarrow \cot A = \frac{1}{\tan A}$$

Ejemplo formativo 4.3

1. Aplica las razones reciprocas del seno, coseno y tangente para calcular las siguientes razones trigonométricas.

   a) $\cot 30°$ b) $\csc A$, si $\operatorname{sen} A = \frac{3}{7}$.   c) $\cot B$, si $\tan B = \frac{1}{5}$.

   Resolución

   a) $\cot 30°$

   $$\cot 30° = \frac{1}{\tan 30°} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

   b) $\csc A$, si $\operatorname{sen} A = \frac{3}{7}$.

   $$\csc A = \frac{1}{\operatorname{sen} A} = \frac{1}{\frac{3}{7}} = \frac{7}{3}$$

c) $\cot B$, si $\tan B = \frac{1}{5}$.

$$\cot B = \frac{1}{\tan B} = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$$

Para racionalizar denominadore, escanea el código QR 4.2.

QR 4.2. Racionalización de denominadore. Video del profe Alex.
Fuente: Parzibyte, 2025.

Ejemplo formativo 4.4

1. Calcula el ángulo ($0° \leq \theta \leq 90°$) que satisface cada una de las siguientes razones trigonométricas.

   a) $\cot\theta = 0.64$　　b) $\sec\theta = 4$　　c) $\csc\theta = 2.5$

   Resolución

   a) $\cot\theta = 0.64$

   $$\tan\theta \cdot \cot\theta = 1 \longrightarrow \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta} = \frac{1}{0.64} \longrightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{0.64}\right) \approx 57.38°$$

   b) $\sec\theta = 4$

   $$\cos\theta \cdot \sec\theta = 1 \longrightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{1}{4} \longrightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) \approx 75.52°$$

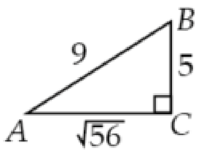
   c) $\csc\theta = 2.5$

   $$\operatorname{sen}\theta \cdot \csc\theta = 1 \longrightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\csc\theta} = \frac{1}{2.5} \longrightarrow \theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2.5}\right) \approx 23.58°$$

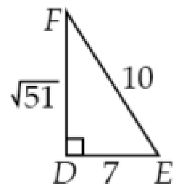
Evaluación formativa 4.1

1. Calcula las razones trigonométricas para los ángulos agudos de los siguientes triángulos.

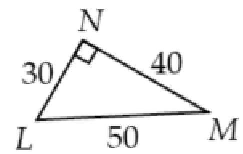
a)



b)



c)



2. Determina las razones trigonométricas exactas para el ángulo de 45°, con base en las medidas del triángulo 45°- 45°- 90°.

$\text{sen}\ 45^\circ = \frac{\quad}{\quad} =$ $\qquad$ $\cos 45^\circ = \frac{\quad}{\quad} =$ $\qquad$ $\tan 45^\circ = \frac{\quad}{\quad} =$

$\csc 45^\circ = \frac{\quad}{\quad} =$ $\qquad$ $\sec 45^\circ = \frac{\quad}{\quad} =$ $\qquad$ $\cot 45^\circ = \frac{\quad}{\quad} =$

3. Determina las razones trigonométricas exactas para los ángulos de 30° y 60°, con base en las medidas del triángulo 30°- 60°- 90°.

$\text{sen}\ 30^\circ = \frac{\quad}{\quad} =$ $\qquad$ $\cos 30^\circ = \frac{\quad}{\quad} =$ $\qquad$ $\tan 30^\circ = \frac{\quad}{\quad} =$

$\csc 30^\circ = \frac{\quad}{\quad} =$ $\qquad$ $\sec 30^\circ = \frac{\quad}{\quad} =$ $\qquad$ $\cot 30^\circ = \frac{\quad}{\quad} =$

$\text{sen}\ 60^\circ = \frac{\quad}{\quad} =$ $\qquad$ $\cos 60^\circ = \frac{\quad}{\quad} =$ $\qquad$ $\tan 60^\circ = \frac{\quad}{\quad} =$

$\csc 60^\circ = \frac{\quad}{\quad} =$ $\qquad$ $\sec 60^\circ = \frac{\quad}{\quad} =$ $\qquad$ $\cot 60^\circ = \frac{\quad}{\quad} =$

4. Determina las razones trigonométricas para los ángulos de 0° y 90°.

   a) Para $A = 0°$, en la definición de las razones trigonométricas usa $a = 0$, $b = 1$ y $c = 1$ y calcula lo siguiente:

$\text{sen}\ 0^\circ = \frac{\quad}{\quad} =$ $\qquad$ $\cos 0^\circ = \frac{\quad}{\quad} =$ $\qquad$ $\tan 0^\circ = \frac{\quad}{\quad} =$

$\csc 0^\circ = \frac{\quad}{\quad} =$ $\qquad$ $\sec 0^\circ = \frac{\quad}{\quad} =$ $\qquad$ $\cot 0^\circ = \frac{\quad}{\quad} =$

   b) Para $A = 90°$, en la definición de las razones trigonométricas usa $a = 1$, $b = 0$ y $c = 1$ y calcula lo siguiente:

$\text{sen}\ 90^\circ = \frac{\quad}{\quad} =$ $\qquad$ $\cos 90^\circ = \frac{\quad}{\quad} =$ $\qquad$ $\tan 90^\circ = \frac{\quad}{\quad} =$

$\csc 90^\circ = \frac{\quad}{\quad} =$ $\qquad$ $\sec 90^\circ = \frac{\quad}{\quad} =$ $\qquad$ $\cot 90^\circ = \frac{\quad}{\quad} =$

5. Calcula el valor numérico exacto de las siguientes expresiones trigonométricas, usando los valores exactos de las razones trigonométricas para los ángulos de 30°, 45° y 60°, que obtuviste en las actividades formativas anteriores.
   a) $2 \operatorname{sen} 30° \cos 30° \cot 60°$
   b) $\operatorname{sen} 60° \cot 30° \tan 45°$
   c) $\operatorname{sen} 30° \cos 45° + \cos 60° \tan 30°$
   d) $\cot 60° \tan 30° + \sec^2 45°$
   e) $\tan^2 60° + 2\tan^2 45°$
   f) $2\cot 30° + \sec 60°$
   g) $3\tan 45° - 4 \operatorname{sen} 30°$
   h) $\dfrac{\tan 45° + \cot 45°}{\csc 60°}$
   i) $\dfrac{\operatorname{sen} 60° - \cos 30°}{\sec 60°}$
   j) $\dfrac{\cos 45° \sec 60°}{\csc 45°}$
6. Determina el valor de las siguientes razones trigonométricas de los ángulos indicados, usando una calculadora. Aproxímalas hasta cuatro cifras decimales.

$\operatorname{sen} 14° =$	$\operatorname{sen} 42° =$	$\cos 34° =$
$\cos 51° =$	$\cos 37° \, 33' 45'' =$	$\cos 56.45° =$
$\operatorname{sen} 7° =$	$\tan 20° =$	$\tan 76.8° =$
$\cos 24° =$	$\operatorname{sen} 64° \; 45' 30'' =$	$\operatorname{sen} 24° \, 30' =$

8. Determina la medida de cada ángulo en grados hasta el décimo de grado más cercano.
   a) $\tan A = 2.0035 \; \longrightarrow A = \tan^{-1}(2.0035) =$
   b) $\cos B = 0.7980 \; \longrightarrow B = \cos^{-1}(0.7980) =$
   c) $\operatorname{sen} A = 0.7245 \; \longrightarrow A = \operatorname{sen}^{-1}(0.7245) =$
   d) $\cos B = 0.2493 \; \longrightarrow B = \cos^{-1}(0.2493) =$
   e) $\tan B = 9.4618 \; \longrightarrow B = \tan^{-1}(9.4618) =$
   f) $\operatorname{sen} B = 0.4567 \; \longrightarrow B = \operatorname{sen}^{-1}(0.4567) =$
   g) $\cos A = 0.1466 \; \longrightarrow A = \cos^{-1}(0.1466) =$
   h) $\tan A = 159.4618 \; \longrightarrow A = \tan^{-1}(159.4618) =$
   i) $\operatorname{sen} A = 0.9855 \; \longrightarrow A = \operatorname{sen}^{-1}(0.9855) =$
9. Si $\operatorname{sen} A = 0.6$, calcula $\cos(90° - A) =$ __________
10. Si $\cot B = 2.4$, determina el valor de $\tan(90° - B) =$ __________
10. Si $\cos 25° = 0.9063$, determina el valor de $\operatorname{sen} 65° =$ __________
11. Sabiendo que $\tan 37° = 0.7536$, encuentra el valor de $\cot 53° =$ __________
12. Si $\sec 42° = 1.3456$, calcula $\csc 48° =$ __________
13. Sabiendo que $\csc A = 5/3$, calcula el valor de $\sec B =$ __________
14. Aplica las razones reciprocas del seno, coseno y tangente para calcular las siguientes razones trigonométricas.
   a) $\cot 35°$ b) $\sec 15°$ c) $\csc 28°$
15. Calcula el ángulo ($0° \leq \theta \leq 90°$) que satisface cada una de las siguientes razones trigonométricas.
   a) $\cot \theta = 0.8391$ b) $\sec \theta = 2.6695$ c) $\csc \theta = 1.5557$

Autoevaluación y coevaluación 4.1

Nombre: ______________________ Plantel: ___________ Grupo: ____ Turno: _______

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 4. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	**En proceso de logro**	**Bueno**	**Sobresaliente**
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente a la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Calculé correctamente las razones trigonométricas (seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante) para ángulos dados en triángulos rectángulos. (M1-C1)			
Interpreté adecuadamente las relaciones trigonométricas entre ángulos complementarios. (M1-C2)			
Expliqué con precisión el concepto de razón trigonométrica recíproca, indicando claramente la relación existente entre seno y cosecante, coseno y secante, tangente y cotangente. (M1-C4)			

Coevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero del equipo que marque en la columna la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 4 y, que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

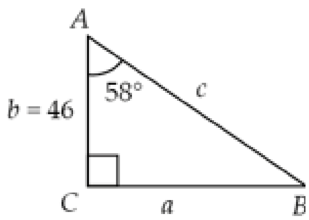
Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente a la retroalimentación de dudas de sus compañeros.			
Calculó correctamente las razones trigonométricas (seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante) para ángulos dados en triángulos rectángulos. (M1-C1)			
Interpretó adecuadamente las relaciones trigonométricas entre ángulos complementarios. (M1-C2)			
Explicó con precisión el concepto de razón trigonométrica recíproca, indicando claramente la relación existente entre seno y cosecante, coseno y secante, tangente y cotangente. (M1-C4)			

____

Nombre y firma de quien coevalúa

PA 5. Resolución de triángulos rectángulos

Aproximado: $\approx$



Para resolver el triángulo rectángulo ΔABC, debes determinar los lados a y c, así como el ángulo B.

$a \approx 73.62$ $\quad$ $A = 58°$

$b = 46$ $\quad$ $B = 32°$

$c = 86.8$ $\quad$ $C = 90$

Progresión de aprendizaje 5

Diseña un método para resolver triángulos rectángulos en situaciones diversas y evalúa la eficacia de diferentes estrategias de resolución.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M1-C1 Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.	A			
	C			
	H			
M1-C2 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	A			
	C			
	H			
M3-C3 Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del pensamiento matemático, de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno.	A			
	C			
	H			
M1-C4 Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.	A			
	C			
	H			

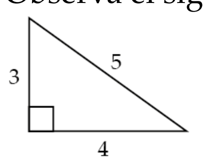
Evaluación diagnóstica 5.1

Analiza y selecciona la respuesta correcta a cada pregunta.

1. En un triángulo rectángulo, uno de sus ángulos agudos mide 35°. ¿cuál es la medida del otro ángulo agudo?

   a) 45° b) 55° c) 90°

2. Observa el siguiente triángulo.

   ¿Cuál es el valor de la hipotenusa?

   a) 3 b) 4 c) 5

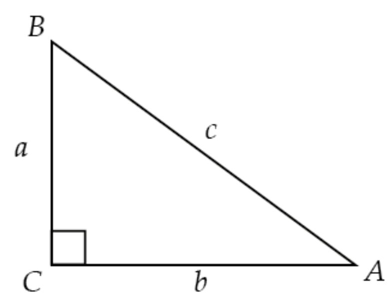
3. En un triángulo rectángulo, un cateto mide 7 cm y la hipotenusa mide 25 cm. ¿Cuál es la medida del tercer lado?

   a) 10 b) 15 c) 24

4. Si $\tan A = 1$, ¿cuál es la medida del ángulo A?

   a) 30° b) 45° c) 60°

En esta progresión aprenderás a resolver triángulos rectángulos. Resolver un triángulo rectángulo significa determinar la medida de todos sus elementos desconocidos a partir de cierta información proporcionada. En términos generales, un triángulo rectángulo está compuesto por tres lados y tres ángulos, de los cuales uno es un ángulo recto (90°), como se muestra en la figura de la derecha.



La resolución de un triángulo rectángulo se basa en dos herramientas matemáticas: el **teorema de Pitágoras**, que permite calcular la longitud de un lado cuando se conocen los otros dos, y las **razones trigonométricas** (seno, coseno y tangente), que establecen relaciones entre los ángulos y los lados del triángulo.

Para resolver un triángulo rectángulo es necesario conocer:

1. Dos lados del triángulo:
   - Si conoces la hipotenusa y un cateto, el otro cateto los puedes determinar mediante el teorema de Pitágoras.
   - Si conoces ambos catetos (a y b), la hipotenusa se calcula con el teorema de Pitágoras.
   - Los ángulos agudos los puedes determinar mediante las razones trigonométricas inversas ($\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ y $\tan^{-1}$).

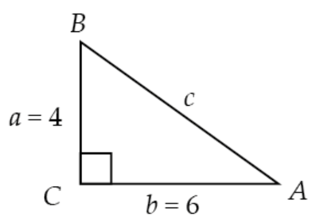
2. Un lado y un ángulo agudo:
   - Si conoces un cateto y un ángulo agudo, puedes calcular los otros elementos aplicando razones trigonométricas.
   - Si conoces la hipotenusa y un ángulo agudo, puedes calcular cada cateto usando el seno y el coseno del ángulo dado.

A continuación, se muestran ejemplos de resolución de triángulos rectángulos con dos lados conocidos.

Ejemplo formativo 5.1

1. Resuelve el triángulo rectángulo en el cual las medidas de los catetos son: $a = 4$ y $b = 6$.

Resolución



Para resolver el triángulo rectángulo, debes determinar el lado c y los ángulos A y B.

$a = 4$	$A = 33.7°$
$b = 6$	$B = 56.3°$
$c = 2\sqrt{13}$	$C = 90°$

Calcula el lado c, aplicando el teorema de Pitágoras, $c^2 = a^2 + b^2 \longrightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \longrightarrow c = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52} = \sqrt{4 \cdot 13} = \sqrt{4}\sqrt{13} = 2\sqrt{13}$$

Calcula el ángulo A mediante la razón trigonométrica $\tan A = \frac{a}{b} \to A = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$.

$$A = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) \to A = \tan^{-1}\left(\frac{4}{6}\right) \to A = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \to A \approx 33.7°$$

Calcula el tercer ángulo B aplicando la propiedad de que en un triángulo rectángulo la suma de las medidas de los ángulos agudos es 90°. $A + B = 90° \longrightarrow B = 90° - A$.

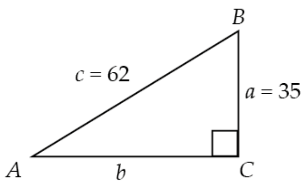
$$B = 90° - A = 90° - 33.7° = 56.3°$$

Los ángulos del triángulo son 33.7°, 56.3° y 90°, y los lados opuestos a dichos ángulos son 4, 6 y $2\sqrt{13}$, respectivamente.

Ejemplo formativo 5.2

1. Resuelve el triángulo rectángulo en el cual la longitud del cateto opuesto al ángulo A es $a = 35$ y la longitud de la hipotenusa es $c = 62$.

Resolución



Para resolver el triángulo rectángulo, debes determinar el lado b y los ángulos A y B.

$a = 35$	$A = 34.4°$
$b = 3\sqrt{291}$	$B = 55.6°$
$c = 62$	$C = 90°$

Calcula el lado b, aplicando el teorema de Pitágoras, $c^2 = a^2 + b^2 \longrightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} \longrightarrow b = \sqrt{(62)^2 - (35)^2} = \sqrt{2619} = \sqrt{9 \cdot 291} = \sqrt{9}\sqrt{291} = 3\sqrt{291}$$

Calcula el ángulo A mediante la razón trigonométrica $\operatorname{sen} A = \frac{a}{c} \rightarrow A = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{a}{c}\right)$.

$$A = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) \rightarrow A = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{35}{62}\right) \rightarrow A \approx 34.4°$$

Calcula el tercer ángulo B aplicando la propiedad de que en un triángulo rectángulo la suma de las medidas de los ángulos agudos es 90°. $A + B = 90° \longrightarrow B = 90° - A$.

$$B = 90° - A = 90° - 34.4° = 55.6°$$

Los ángulos del triángulo son 34.4°, 55.6° y 90°, y los lados opuestos a dichos ángulos son 35, $3\sqrt{291}$ y 62, respectivamente.

A través de los siguientes códigos puedes observar videos que te ayudaran a resolver un triángulo rectángulo, según los datos que conozcas. Por ejemplo, el video del código QR 5.1, se conocen los dos catetos y con ayuda del teorema de Pitágoras puedes determinar la hipotenusa.

QR 5.1. Determinar la hipotenusa en un triángulo rectángulo. Video del profe Alex.
Fuente: Parzibyte, 2025.

En el video del código QR 5.2, se conocen un cateto y la hipotenusa, por lo que con ayuda del teorema de Pitágoras puedes determinar el otro cateto.

QR 5.2. Determinar un cateto en un triángulo rectángulo. Video del profe Alex.
Fuente: Parzibyte, 2025.

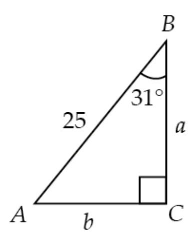
En el video del código QR 5.3, se conocen los dos catetos y con ayuda de las razones trigonométricas puedes determinar un ángulo.

QR 5.3. Determinar un ángulo en un triángulo rectángulo. Video del profe Alex.
Fuente: Parzibyte, 2025.

A continuación, se muestran ejemplos de resolución de triángulos rectángulos con un lado y un ángulo agudo conocidos.

Ejemplo formativo 5.3

1. Resuelve el triángulo rectángulo en el cual la longitud de la hipotenusa es 25 y la medida del ángulo B es 31°.



Resolución
Para resolver el triángulo rectángulo, debes determinar los lados a, b, así como el ángulo A.

$a \approx 21.43$	$A = 59°$
$b \approx 12.88$	$B = 31°$
$c = 25$	$C = 90°$

Calcula el tercer ángulo A aplicando la propiedad de que en un triángulo rectángulo la suma de las medidas de los ángulos agudos es 90°. $A + B = 90° \longrightarrow A = 90° - B$.

$$A = 90° - B = 90° - 31° = 59°$$

Calcula el lado a mediante la razón trigonométrica $\operatorname{sen} A = \frac{a}{c} \rightarrow a = c \cdot \operatorname{sen} A$.

$$a = c \cdot \operatorname{sen} A \rightarrow a = 25 \cdot \operatorname{sen} 59° \rightarrow a \approx 21.43$$

Calcula el lado b mediante la razón trigonométrica $\cos A = \frac{b}{c} \rightarrow b = c \cdot \cos A$.

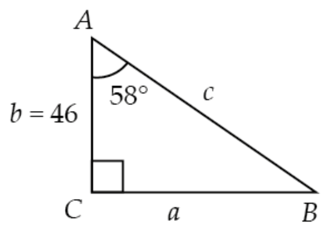
$$b = c \cdot \cos A \rightarrow b = 25 \cdot \cos 59° \rightarrow b \approx 12.88$$

Los ángulos del triángulo son 59°, 31° y 90°, y los lados opuestos a dichos ángulos son 21.43, 12.88 y 25, respectivamente.

Ejemplo formativo 5.4

1. Resuelve el triángulo rectángulo en el cual la longitud del lado opuesto al ángulo B es 46 y la medida del ángulo A es 58°.

Resolución



Para resolver el triángulo rectángulo, debes determinar los lados a, c, así como el ángulo B.

$a \approx 73.62$	$A = 58°$
$b = 46$	$B = 32°$
$c = 86.8$	$C = 90°$

Calcula el tercer ángulo B aplicando la propiedad de que en un triángulo rectángulo la suma de las medidas de los ángulos agudos es 90°. $A + B = 90° \longrightarrow B = 90° - A$.

$$B = 90° - A = 90° - 58° = 32°$$

Calcula el lado a mediante la razón trigonométrica $\tan A = \frac{a}{b} \rightarrow a = b \cdot \tan A$.

$$a = b \cdot \tan A \rightarrow \ a = 46 \cdot \tan 58° \rightarrow a \approx 73.62$$

Calcula el lado c mediante la razón trigonométrica $\cos A = \frac{b}{c} \rightarrow c = \frac{b}{\cos A}$.

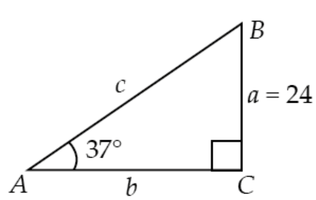
$$c = \frac{b}{\cos A} \rightarrow \ c = \frac{46}{\cos 58°} \rightarrow c \approx 86.8$$

Los ángulos del triángulo son 58°, 32° y 90°, y los lados opuestos a dichos ángulos son 73.62, 46 y 86.8, respectivamente.

Ejemplo formativo 5.5

1. Resuelve el triángulo rectángulo en el cual la longitud del lado opuesto al ángulo A es 24 y la medida del ángulo A es 37°.

Resolución



Para resolver el triángulo rectángulo, debes determinar los lados b, c, así como el ángulo B.

$a = 24$	$A = 37°$
$b = 31.85$	$B = 53°$
$c = 39.88$	$C = 90°$

Calcula el tercer ángulo B aplicando la propiedad de que en un triángulo rectángulo la suma de las medidas de los ángulos agudos es 90°. $A + B = 90° \longrightarrow B = 90° - A$.

$$B = 90° - A = 90° - 37° = 53°$$

Calcula el lado b mediante la razón trigonométrica $\tan A = \frac{a}{b} \rightarrow b = \frac{a}{\tan A}$.

$$b = \frac{a}{\tan A} \rightarrow \ b = \frac{24}{\tan 37°} \rightarrow b \approx 31.85$$

Calcula el lado c mediante la razón trigonométrica $\operatorname{sen} A = \frac{a}{c} \rightarrow c = \frac{a}{\operatorname{sen} A}$.

$$c = \frac{a}{\operatorname{sen} A} \rightarrow \ c = \frac{24}{\operatorname{sen} 37°} \rightarrow c \approx 39.88$$

Los ángulos del triángulo son 37°, 53° y 90°, y los lados opuestos a dichos ángulos son 24, 31.85 y 39.88, respectivamente.

En el video del código QR 6.4, se conocen un ángulo y el cateto opuesto, con ayuda de las razones trigonométricas puedes resolver un triángulo.

QR 6.4. Determinar un ángulo en un triángulo rectángulo. Video del profe Alex.
Fuente: Parzibyte, 2025.

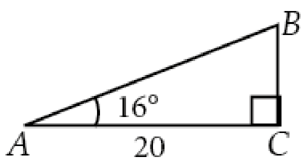
Evaluación formativa 5.1

1. Resuelve un triángulo rectángulo utilizando los datos proporcionados. En cada caso, realiza un bosquejo de la figura, identifica la razón trigonométrica adecuada y, si es necesario, aplica el teorema de Pitágoras para calcular los lados faltantes. Expresa las respuestas aproximadas redondeadas al décimo más cercano.

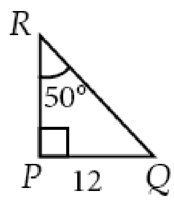
a) $a = 6$, $b = 8$	b) $a = 10$, $c = 12$	c) $b = 6$, $c = 8.3$
d) $A = 16°$, $c = 20$	e) $A = 32.4°$, $b = 10$	f) $B = 47°$, $a = 3$
g) $A = 39°\ 9'$, $a = 9$	h) $B = 19°\ 12'$, $b = 60$	i) $A = 60°$, $a = \sqrt{3}$

2. Resuelve cada triángulo rectángulo utilizando los datos proporcionados. En cada caso, realiza un bosquejo de la figura, identifica la razón trigonométrica adecuada y, si es necesario, aplica el teorema de Pitágoras para calcular los lados faltantes. Expresa las respuestas aproximadas redondeadas al décimo más cercano.

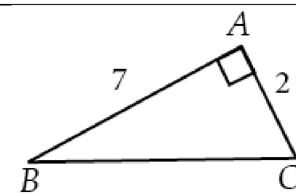
a)



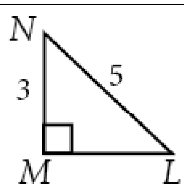
b)



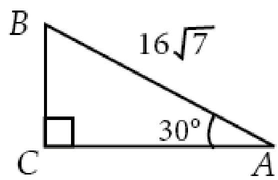
c)



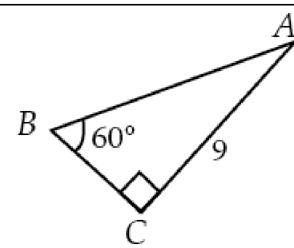
d)



e)



f)



Autoevaluación y coevaluación 5.1

Nombre: ______________________ Plantel: ___________ Grupo: ____ Turno: _______

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 5. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	**En proceso de logro**	**Bueno**	**Sobresaliente**
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente a la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Utilicé razones trigonométricas para calcular ángulos o lados faltantes en un triángulo rectángulo. (M1-C1)			
Representé correctamente un triángulo rectángulo en un esquema gráfico, identificando hipotenusa, catetos y ángulos. (M1-C2)			
Empleé un lenguaje matemático preciso para describir la resolución de triángulos rectángulos. (M3-C3)			
Expliqué de manera clara y ordenada los pasos seguidos en la resolución de un triángulo rectángulo. (M1-C4)			

Coevaluación para el aprendizaje

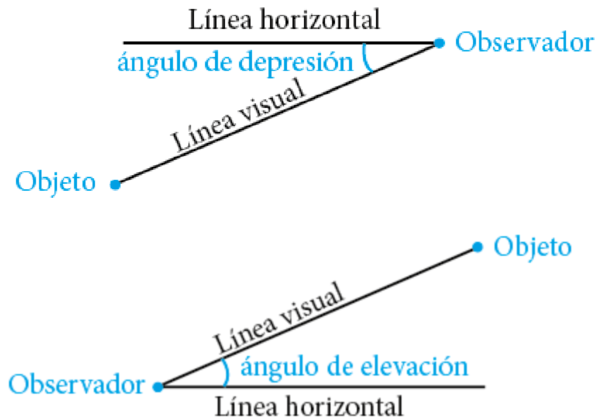
Solicita a un compañero del equipo que marque en la columna la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 5 y, que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

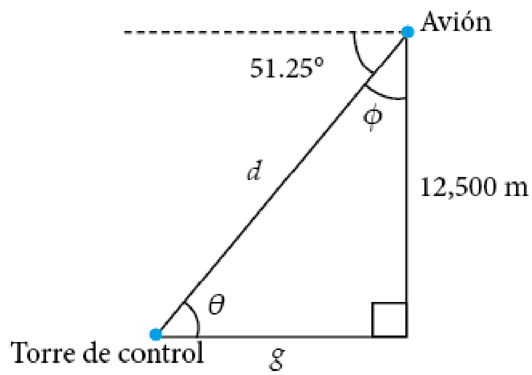
Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente a la retroalimentación de dudas de sus compañeros.			
Utilizó razones trigonométricas para calcular ángulos o lados faltantes en un triángulo rectángulo. (M1-C1)			
Representó correctamente un triángulo rectángulo en un esquema gráfico, identificando hipotenusa, catetos y ángulos. (M1-C2)			
Empleó un lenguaje matemático preciso para describir la resolución de triángulos rectángulos. (M3-C3)			
Explicó de manera clara y ordenada los pasos seguidos en la resolución de un triángulo rectángulo. (M1-C4)			

____

Nombre y firma de quien coevalúa

PA 6. Aplicaciones de la trigonometría





Progresión de aprendizaje 6				
Desarrolla modelos trigonométricos para resolver problemas en física, ingeniería y otras ciencias, y evalúa críticamente las limitaciones y ventajas de estos modelos.				
Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M2-C1 Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.	A			
	C			
	H			
M4-C2 Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.	A			
	C			
	H			
M2-C3 Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.	A			
	C			
	H			

Evaluación diagnóstica 6.1

Analiza y selecciona la respuesta correcta a cada pregunta.

1. ¿Cuál de las siguientes expresiones corresponde a la definición de la razón seno en un triángulo rectángulo?

   a) $\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$ b) $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$ c) $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$

2. En un triángulo rectángulo, si un cateto mide 3 cm, el otro cateto mide 4 cm, ¿cuánto mide la hipotenusa?

   a) 5 cm b) 6 cm c) 7 cm

3. En un triángulo rectángulo, si el cateto adyacente a un ángulo mide 1 cm y la hipotenusa mide 2 cm, ¿cuál es el valor del coseno de ese ángulo?

   a) 0.5 b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ c) $\sqrt{2}$

4. Si $\tan\beta = \sqrt{3}$, ¿cuál es el valor de β?

   a) 30° b) 45° c) 60°

Las razones trigonométricas permiten resolver problemas prácticos relacionados con triángulos rectángulos. A través de estas razones, es posible relacionar los ángulos de un triángulo con las longitudes de sus lados, facilitando el cálculo de distancias y medidas difíciles de obtener directamente. Por ejemplo: la medición de alturas de objetos inalcanzables en problemas de ingeniería, arquitectura y navegación como se explica en el código QR 6.1.

QR 6.1. Aplicaciones de la trigonometría. Video de 1000ton Cesar.
Fuente: Parzibyte, 2025.

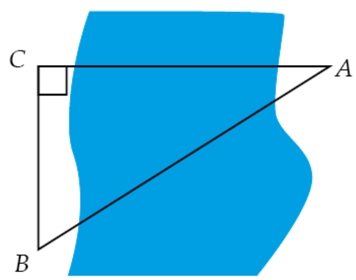
En este tema, aprenderás cómo utilizar el seno, el coseno y la tangente para calcular un ángulo o un lado indicado, en los siguientes casos:

- Conocidos un lado y un ángulo agudo. Al conocer uno de los ángulos agudos y un lado, puedes utilizar las razones trigonométricas (seno, coseno o tangente) para determinar las longitudes de los otros lados. Para conocer el ángulo restante, puedes aplicar la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.
- Conocidos dos lados del triángulo rectángulo. Al conocer la longitud de dos lados, puedes aplicar directamente el teorema de Pitágoras para conocer el tercer lado o usar las razones trigonométricas inversas para determinar los ángulos.

Ejemplo formativo 6.1

1. Los planes indican la construcción de un puente a través del río desde el punto C hasta el punto A. El topógrafo, formando un ángulo recto con $\overline{CA}$ camina 100 metros a lo largo de la orilla del río desde el punto C hasta el punto B y luego mide el ángulo $\angle CBA$. La medida del ángulo es $\angle CBA = 63°$. Determina la longitud del puente.

Resolución



Para calcular la longitud del puente $\overline{AC}$, que es el lado opuesto al ángulo B, usa la razón tangente, dado que conoces:

- Ángulo $B = 63°$.
- Lado adyacente al ángulo B: $CB = 100\ m$.

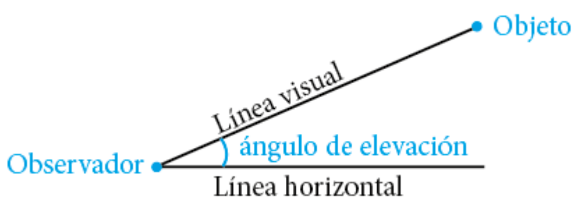
$$\tan B = \frac{lado\ opuesta\ al\ ángulo\ B}{lado\ adyecente\ al\ ángulo\ B} = \frac{AC}{CB}$$

$$tan\ 63° = \frac{AC}{100} \longrightarrow AC = 100 \cdot tan\ 63° \approx 196.26$$

La longitud del puente es de aproximadamente 196 m.

Para resolver problemas que involucran la observación de un objeto desde un punto de vista específico, en los que se requiere calcular alturas o distancias, es fundamental comprender los conceptos de ángulo de elevación y ángulo de depresión.

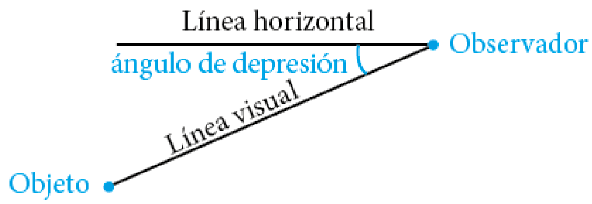
Ángulo de elevación. Es el ángulo formado entre la línea horizontal del observador y la línea visual que se dirige hacia un objeto situado por encima de él. Se mide desde la línea de visión horizontal hacia arriba, como se muestra en la siguiente figura.



Por ejemplo, si una persona en el suelo observa la cima de un edificio, el ángulo formado entre la línea horizontal de sus ojos y la línea visual que apunta a la cima es el ángulo de elevación.

Ángulo de depresión. Es el ángulo formado entre la línea horizontal del observador y la línea visual que se dirige hacia un objeto situado por debajo de él.

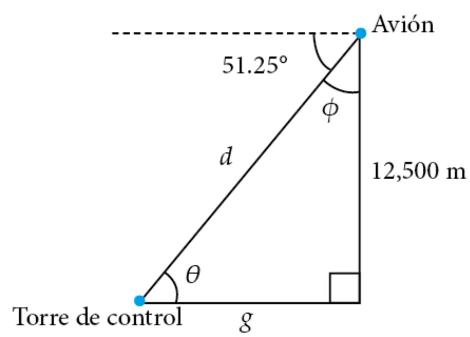
Se mide desde la línea de visión horizontal hacia abajo, como se observa en la siguiente figura.



Por ejemplo, si una persona en la cima de un faro observa un bote en el mar, el ángulo formado entre la línea horizontal de su mirada y la línea visual hacia el bote es el ángulo de depresión. Puedes aclarar dudas observando el video del código QR 6.2.

QR 6.2. Ángulo de elevación y de depresión. Video del profe Alex.
Fuente: Parzibyte, 2025.

Ejemplo formativo 6.2



1. El ángulo de depresión desde un avión que vuela a 12,500 m hasta la torre de control del aeropuerto es 51.25°, como se observa en la figura de la derecha.

   a) Determina la distancia d.

   b) Encuentra la distancia g.

   Resolución

   a) Determina la distancia d.

   Calcula la medida del ángulo $\phi = 90° - 51.25° = 38.75°$.

   Conoces:

   - La medida del ángulo $\phi = 38.75°$
   - La altura del avión: $h = 12{,}500\ m$

   Para calcular la distancia d de la torre de control al avión, usa la razón coseno.

$$cos\ \phi = \frac{h}{d} \longrightarrow cos\ 38.75° = \frac{12500}{d} \longrightarrow d = \frac{12500}{cos\ 38.75°} \approx 16028$$

   La distancia de la torre de control al avión es de aproximadamente 16,028 metros.

b) Encuentra la distancia g.

Calcula la medida del ángulo θ, para ello, observa que el ángulo de elevación es congruente con el ángulo de depresión (por ser ángulos alternos internos), por lo que $\theta = 51.25°$.

Conoces:

- La medida del ángulo $\theta = 51.25°$
- La altura del avión: $h = 12{,}500\ m$

Para calcular la distancia g, usa la razón tangente.

$$tan\ 51.25° = \frac{h}{g} \longrightarrow tan\ 51.25° = \frac{12500}{g} \longrightarrow g = \frac{12500}{tan\ 51.25°} \approx 10032$$

La distancia g es de aproximadamente 10,032 metros.

Escanea el código QR 6.3 para ver otro ejemplo en el que se usa el ángulo de elevación.

QR 6.3. Ejemplo donde se usa el ángulo de elevación. Video del profe Alex. *Fuente*: Parzibyte, 2025.

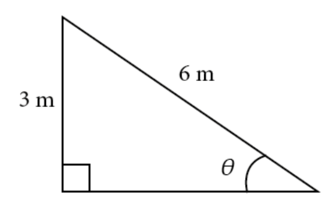
Ejemplo formativo 6.3

1. ¿Qué ángulo debe formar con el piso una escalera de seis metros de longitud, si se quiere alcanzar la parte más alta de una pared de tres metros?

Resolución

Conoces:

- La altura de la barda: $h = 3\ m$.
- La longitud de la escalera: $l = 6\ m$



Para calcular el ángulo θ comprendido entre la línea horizontal y la longitud de la escalera, usa la razón seno.

$$sen\ \theta = \frac{h}{l} \longrightarrow sen\ \theta = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \longrightarrow \theta = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30°$$

El ángulo comprendido entre la línea horizontal y la longitud de la escalera es de 30°.

Evaluación formativa 6.1

1. Con un viento fuerte, una cometa tensa su cuerda formando un ángulo de 28° con el suelo. Si se han soltado 137 metros de cuerda, ¿a qué altura se encuentra la cometa sobre el suelo?
2. Una escalera en un camión de bomberos está montada a cuatro metros sobre el suelo y tiene una longitud de 32 metros. Se extiende desde el camión formando un ángulo de 80°. Determina la altura que alcanzará la escalera en el costado de un edificio.
3. Una antena de comunicaciones se sostiene mediante un cable que va desde su cima hasta un punto del suelo que se encuentra a 12 metros de distancia horizontal de la base de la antena. Si la altura de la antena es de 20 metros, determina el ángulo que forma el cable con el suelo.
4. Un dron que vuela a 40 metros de altura detecta un objeto en el suelo con un ángulo de depresión de 5°45′. Calcula la distancia horizontal entre el dron y el objeto.
5. Durante una inspección topográfica, se coloca una vara vertical de 1.2 m y se mide una sombra de 0.6 m proyectada sobre el terreno. Calcula el ángulo de elevación del Sol que produce esa sombra.
6. Un árbol proyecta una sombra de 6 metros cuando el ángulo de elevación del Sol mide 58°. ¿Cuál es la altura del árbol?

Autoevaluación y coevaluación 6.1

Nombre: ______________________ Plantel: ___________ Grupo: ____ Turno: _______

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 6. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	**En proceso de logro**	**Bueno**	**Sobresaliente**
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente a la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Analicé críticamente los resultados obtenidos al aplicar modelos trigonométricos, justificando su validez en función del contexto. (M2-C1)			
Evalué críticamente la aplicabilidad de los modelos trigonométricos utilizados para resolver problemas. (M4-C2)			
Apliqué las razones trigonométricas para resolver problemas en contextos diversos, considerando diferentes estrategias de solución. (M2-C3)			

Coevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero del equipo que marque en la columna la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 6 y, que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

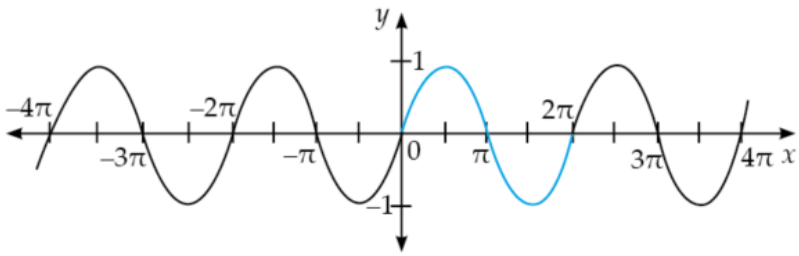
Desempeño	**En proceso de logro**	**Bueno**	**Sobresaliente**
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente a la retroalimentación de dudas de sus compañeros.			
Analizó críticamente los resultados obtenidos al aplicar modelos trigonométricos, justificando su validez en función del contexto. (M2-C1)			
Evaluó críticamente la aplicabilidad de los modelos trigonométricos utilizados para resolver problemas. (M4-C2)			
Aplicó las razones trigonométricas para resolver problemas en contextos diversos, considerando diferentes estrategias de solución. (M2-C3)			

____

Nombre y firma de quien coevalúa

PA 7. Funciones trigonométricas y sus gráficas

Gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$



Propiedades

Dominio: $\mathcal{R}$

Rango: $[-1, 1]$

Periodo: 2π, $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + 2\pi)$

Ceros: $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Paridad: impar, $-\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(-x)$

Continuidad: Continua en todo $\mathcal{R}$

Máximos: $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, 1\right), k \in \mathbb{Z}$

Mínimos: $\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k, -1\right), k \in \mathbb{Z}$

Creciente en $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

Decreciente en $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

Puntos de Inflexión: $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$

Progresión de aprendizaje 7

Analiza el comportamiento de las funciones trigonométricas bajo diferentes transformaciones y desarrolla modelos matemáticos que utilicen estas funciones para describir fenómenos periódicos.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M3-C1 Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares.	A			
	C			
	H			
M2-C2 Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieran explicación o interpretación.	A			
	C			
	H			
M2-C4 Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno.	A			
	C			
	H			

Evaluación diagnóstica 7.1

Analiza y selecciona la respuesta correcta a cada pregunta.

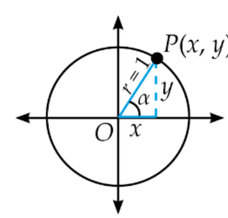
1. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones describe correctamente el concepto de función en matemáticas?
   a) Una función es una relación en la que un mismo elemento del dominio puede asociarse con más de un elemento del rango.
   b) Una función es una correspondencia entre dos conjuntos donde a cada elemento del dominio le corresponde exactamente un único elemento del rango.
   c) Una función es cualquier regla matemática que asocia elementos de un conjunto con otro, sin importar cuántos valores del rango le correspondan a cada elemento del dominio.

2. ¿Cuál es el dominio de esta función $f(x) = \frac{1}{x}$?
   a) $R \setminus \{0\}$ (Todos los números reales excepto el cero).
   b) R (Todos los números reales).
   c) R^+ (Solo los números reales positivos).

3. ¿Cuál es el rango de la función $g(x) = \sqrt{x}$?
   a) R b) $\{x \mid x \in (0, \infty)\}$ c) $\{x \mid x \in [0, \infty)\}$

4. ¿Cuál es el valor en radianes de un ángulo de 60°?
   a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{\pi}{3}$

Círculo unitario y gráficas de las funciones trigonométricas



Ahora considera un sistema de coordenadas y una circunferencia con centro en el origen de radio uno (círculo unitario), como la figura de la derecha, en la que α es un ángulo en posición estándar y $P(x, y)$ un punto que pertenece a la circunferencia de radio $r = 1$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Entonces, definimos las funciones trigonométricas

Definición de las funciones trigonométricas

Si α es un ángulo en posición estándar, cuyo lado terminal interseca el círculo unitario en el punto $P(x, y)$, entonces

$$\operatorname{sen}\alpha = y \qquad \cos\alpha = x \qquad \tan\alpha = \frac{y}{x}$$

$$\csc\alpha = \frac{1}{y} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{x} \qquad \cot\alpha = \frac{x}{y}$$

siempre que ningún denominador sea igual a cero.

Para ver cómo se grafican las funciones trigonométricas seno y coseno observa el video a través del código QR 8.1.

QR 8.1. Gráfica del seno y del coseno sin calculadora. Video del profe Alex.
Fuente: Parzibyte, 2025.

Función seno: definición, gráfica y propiedades

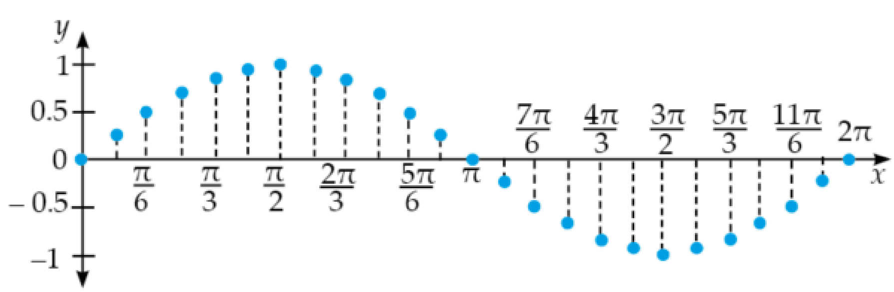
Definición de la función seno
Se llama función seno a la función que a cada número real x le asocia $y = \operatorname{sen} x$, donde x está expresada en radianes.

La función seno está formada por los pares ordenados $(x, \operatorname{sen} x)$ con $x \in \mathcal{R}$. Tiene como dominio al conjunto de los números reales, $D_y\colon \mathcal{R}$. Por otra parte, la función seno satisface que $\operatorname{sen}(x + 2k\pi) = \operatorname{sen} x$, para $k \in \mathbb{Z}$, por lo que basta representarla en un intervalo de longitud 2π. Mediante la calculadora puedes determinar algunos valores como los que se muestran en la siguiente tabla.

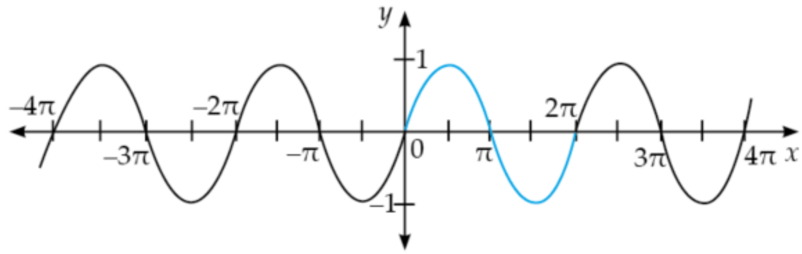
x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$
$\operatorname{sen} x$	0	0.26	0.5	0.71	0.87	0.97	1	0.97	0.87	0.71	0.5	0.26

x	π	$\frac{13\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{17\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{19\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{23\pi}{12}$
$\operatorname{sen} x$	0	–0.26	–0.5	–0.71	–0.87	–0.97	–1	–0.97	–0.87	–0.71	–0.5	–0.26

A continuación, se representan los pares ordenados de la tabla anterior en un sistema de coordenadas para obtener la siguiente gráfica.



Los valores de la función seno se repiten cada intervalo de longitud 2π, por lo que la gráfica de la función que está en el intervalo $[0, 2\pi]$ se traslada la porción que corresponde a cada intervalo de dicha longitud tantas veces como sea necesario, y así obtienes el siguiente gráfico de la función $y = \text{sen}\, x$. Además, ten en cuenta que $\text{sen}(-x) = -\sin x$, puedes ver la justificación a través del código QR 8.2.



QR 8.2. Justificación de que $\text{sen}(-x) = -\sin x$. Video Gustavo Magallanes-Guijón.
Fuente: Parzibyte, 2025.

Las propiedades de la función $y = \text{sen}\, x$ son las siguientes.

Dominio: $\mathcal{R}$

Rango: [–1, 1]

Periodo: 2π, $\text{sen}\, x = \text{sen}(x + 2\pi)$

Ceros: $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Paridad: impar, $-\text{sen}\, x = \text{sen}(-x)$

Continuidad: Continua en todo $\mathcal{R}$

Máximos: $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, 1\right), k \in \mathbb{Z}$

Mínimos: $\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k, -1\right), k \in \mathbb{Z}$

Creciente en $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

Decreciente en $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

Puntos de Inflexión: $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$

Función coseno: definición, gráfica y propiedades

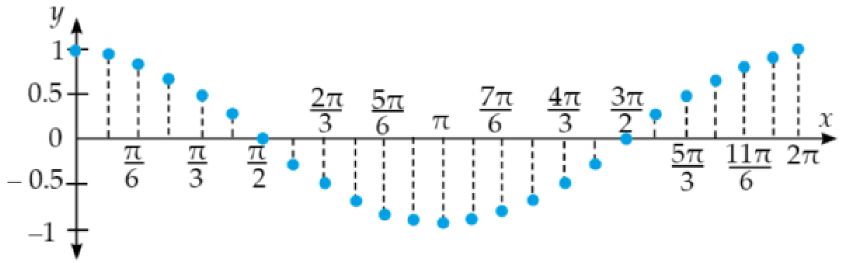
Definición de la función coseno
Se llama función coseno a la función que a cada número real x le asocia $y = \cos x$, donde x está expresada en radianes.

Esta función está formada por los pares ordenados $(x, \cos x)$. La función coseno tiene como dominio al conjunto de los números reales, D_y: $\mathcal{R}$.Y al igual que la función seno, es suficiente representar gráficamente la función coseno en el intervalo $[0, 2\pi]$ y también es una función periódica de periodo 2π.

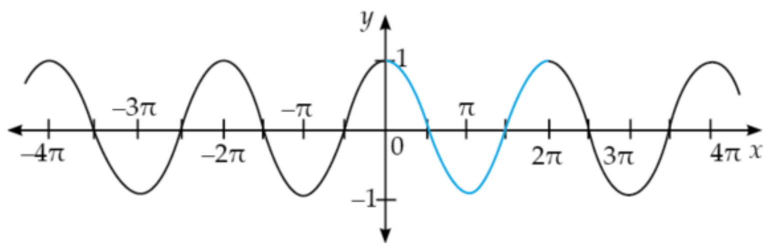
x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$
$\cos x$	1	0.97	0.87	0.71	0.5	0.26	0	–0.26	–0.5	–0.71	–0.87	–0.97

x	π	$\frac{13\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{17\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{19\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{23\pi}{12}$
$\cos x$	–1	–0.97	–0.87	–0.71	–0.5	–0.26	0	0.26	0.5	0.71	0.87	0.97

Representando los pares ordenados en el sistema de coordenadas se obtiene la siguiente gráfica.



Al igual que la función seno, la gráfica de la función coseno en todo $\mathcal{R}$ se obtiene trasladando el gráfico correspondiente al intervalo $[0, 2\pi]$ en ambos sentidos.



Las propiedades de la función $y = \cos x$ son las siguientes.

Dominio: $\mathcal{R}$
Rango: [–1, 1]
Periodo: 2π, $\cos x = \cos(x + 2\pi)$
Ceros: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.
Paridad: par, $\cos x = \cos(-x)$
Continuidad: Continua en todo $\mathcal{R}$

Máximos: $(2\pi k, 1), k \in \mathbb{Z}$
Mínimos: $(\pi(2k + 1), -1), k \in \mathbb{Z}$
Creciente en $(\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$
Decreciente en $(2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$
Puntos de Inflexión: $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

Función tangente: definición, gráfica y propiedades

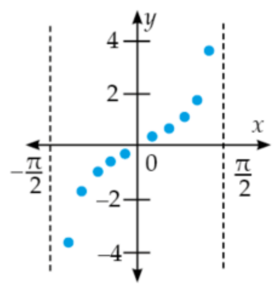
Definición de la función tangente

Se llama función tangente a la función que a cada número real $x \neq \frac{k\pi}{2}$ con k entero impar le asocia $y = \tan x$, donde x está expresada en radianes.

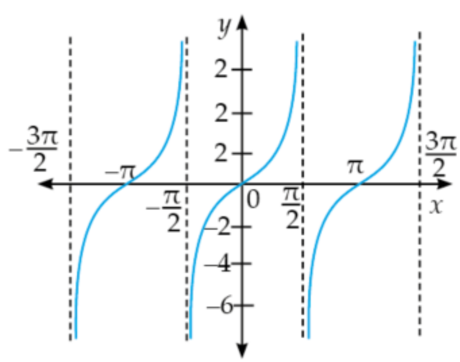
La función tangente es el cociente del seno y del coseno, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Entonces su dominio son todos los números reales excepto los valores de x que anulan al denominador, estos son los valores de $x = \frac{k\pi}{2}$ con k entero impar, que es donde el valor de la función es indefinido (tiende a ∞). Estos valores de x representan asíntotas verticales para la función. Además, dado que $\tan x = \tan(x + \pi)$, se representa la función en un intervalo de longitud π, por ejemplo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, para trabajar en un intervalo en el que está definida en todos los puntos.

x	$-\frac{5\pi}{12}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{12}$	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$
sen x	–0.97	–0.87	–0.71	–0.5	–0.26	0	0.26	0.5	0.71	0.87	0.97
cos x	0.26	0.5	0.71	0.87	0.97	1	0.97	0.87	0.71	0.5	0.26
tan x	–3.73	–1.73	–1	–0.58	–0.27	0	0.27	0.58	1	1.73	3.73

Al representar los pares ordenados de la tabla anterior, en un sistema de coordenadas, obtienes la siguiente gráfica.



La gráfica de la función tangente la obtienes trasladando en ambos sentidos indefinidamente la gráfica obtenida en el intervalo$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Además, ten en cuenta que $-\tan x = \tan(-x)$.



Las propiedades de la función $y = \tan x$ son las siguientes.

Dominio: $\mathcal{R} - \left\{x \mid x \in \mathcal{R} \text{ y } x \neq \frac{k\pi}{2}, k \text{ es entero impar}\right\}$

Rango: $\mathcal{R}$

Periodo: π, $\tan x = \tan(x + \pi)$

Ceros: $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Paridad: impar, $-\tan x = \tan(-x)$

Creciente en $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

Puntos de Inflexión: $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$

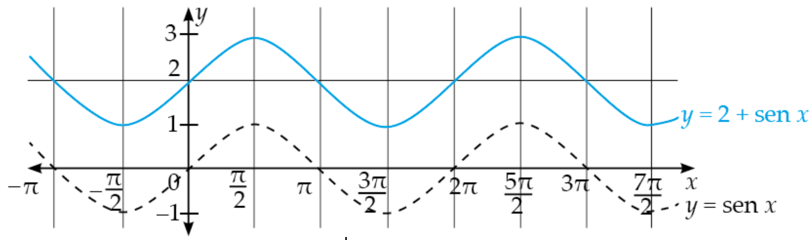
Asíntotas verticales: $x = \frac{k\pi}{2}$, k es entero impar

Ejemplo formativo 7.1

1. Analiza y grafica la función $y = 2 + \operatorname{sen} x$.

Resolución

x rad	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$y = \sin x$	0	–1	–0.87	–0.71	–0.5	0	0.5	0.71	0.87	1	0
$y = 2 + \operatorname{sen} x$	2	1	1.13	1.29	1.5	2	2.5	2.71	2.87	3	2



Dominio: $\mathcal{R}$.

Rango: [1, 3]

Periodo: 2π o 360°.

Continuidad: Continua en todo $\mathcal{R}$

Máximos: $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, 3\right), k \in \mathbb{Z}$

Mínimos: $\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k, 1\right), k \in \mathbb{Z}$

Creciente en $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

Decreciente en $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

Puntos de Inflexión: $(k\pi, 2)$, $k \in \mathbb{Z}$

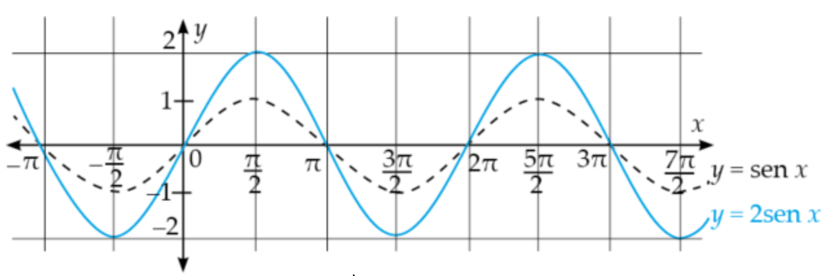
Ejemplo formativo 7.2

1. Analiza y grafica la función $y = 2 \operatorname{sen} x$.

Resolución

Primero analiza el comportamiento de la función básica $y = \operatorname{sen} x$, luego al multiplicarla por 2, analiza el efecto en la gráfica resultante.

x rad	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$y = \operatorname{sen} x$	0	–1	–0.87	–0.71	–0.5	0	0.5	0.71	0.87	1	0
$y = 2 \operatorname{sen} x$	0	–2	–1.73	–1.41	–1	0	1	1.41	1.73	2	0



Dominio: $\mathcal{R}$

Rango: [–2, 2]

Periodo: 2π

Ceros: $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Máximos: $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, 2\right), k \in \mathbb{Z}$

Mínimos: $\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k, -2\right), k \in \mathbb{Z}$

Creciente en $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

Decreciente en $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

Continuidad: Continua en todo $\mathcal{R}$ | Puntos de Inflexión: $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$

Ejemplo formativo 7.3

1. Analiza y grafica la función $y = \operatorname{sen} 2x$.

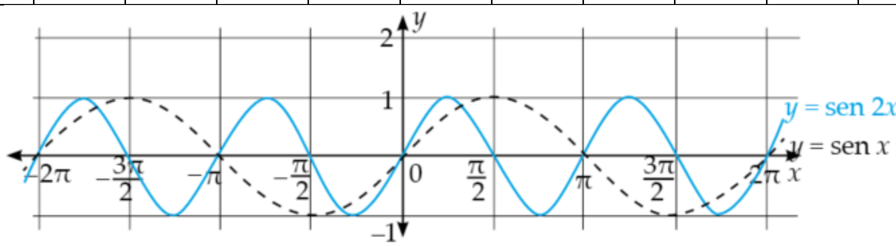
   Resolución

   Primero analiza el comportamiento de la función básica $y = \operatorname{sen} x$.

x rad	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$y = \operatorname{sen} x$	0	–1	–0.87	–0.71	–0.5	0	0.5	0.71	0.87	1	0

   Ahora, analiza el efecto en la gráfica resultante al multiplicar por 2 el argumento de la función básica $y = \operatorname{sen} x$.

$2x$ rad	-2π	$-\pi$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	2π
$y = \operatorname{sen} 2x$	0	0	–0.87	–1	–0.87	0	0.87	1	0.87	0	0



Dominio: $\mathcal{R}$ | Máximos: $\left(\frac{\pi}{4} + \pi k, 1\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

Rango: [–1, 1] | Mínimos: $\left(\frac{3\pi}{4} + \pi k, -1\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

Periodo: π | Creciente en $\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

Ceros: $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. | Decreciente en $\left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

Continuidad: Continua en todo $\mathcal{R}$ | Puntos de Inflexión: $\left(\frac{k\pi}{2}, 0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

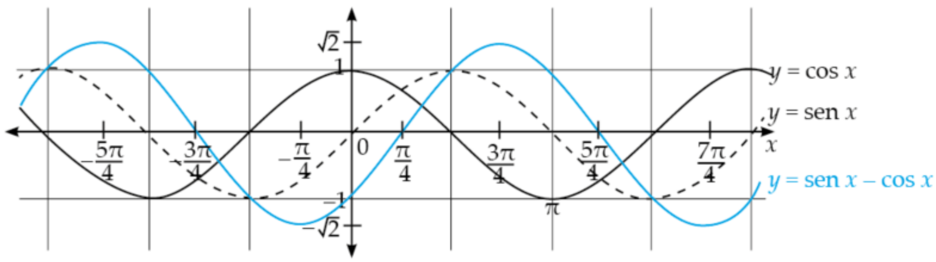
Ejemplo formativo 7.4

1. Analiza y grafica la función $y = \operatorname{sen} x - \cos x$.

Resolución

Analiza el comportamiento de las funciones básicas $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$, luego haz $y = \operatorname{sen} x - \cos x$ y analiza el efecto en la gráfica resultante.

x rad	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$y = \operatorname{sen} x$	0	–1	–0.87	–0.71	–0.5	0	0.5	0.71	0.87	1	0
$y = \cos x$	–1	0	0.5	0.71	0.87	1	0.87	0.71	0.5	0	–1
$y = \operatorname{sen} x - \cos x$	1	–1	–1.37	–1.41	–1.37	–1	–0.37	0	0.37	1	1



Dominio: $\mathcal{R}$

Rango: $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

Periodo: 2π

Ceros: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Continuidad: Continua en todo $\mathcal{R}$

Máximos: $\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \sqrt{2}\right), k \in \mathbb{Z}$

Mínimos: $\left(\frac{7\pi}{4} + 2\pi k, -\sqrt{2}\right), k \in \mathbb{Z}$

Creciente en $\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

Decreciente en $\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

Puntos de Inflexión: $\left(\frac{\pi}{4} + k\pi, 0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

Actividad formativa 7.1

1. Analiza y grafica las siguientes funciones, considerando los valores de x en los ejemplos anteriores.

a) $y = \operatorname{sen} x$ b) $y = \cos x$ c) $y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ d) $y = \csc x = \frac{1}{\sin x}$

e) $y = \cos x + 1$ f) $y = 3\cos x$ g) $y = \cos 3x$ h) $y = \operatorname{sen} x + \cos x$

i) $\tan x + 2$ j) $\cot x - 2$ k) $y = \cos x^2$ l) $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$

2. Los ingenieros marítimos modelan las olas de un tsunami mediante la función $y = a\cos\,(bt)$. Una ola que al instante $t = 0$ tiene una altura de $y = 40$ pies y viaja a razón de 190 pies por segundo con un periodo de 30 minutos:
   a) Determina los valores de a y b.
   b) ¿Cuántos pies recorrerá una ola de tsunami en 30 minutos?

Autoevaluación y coevaluación 7.1

Nombre: ______________________ Plantel: ___________ Grupo: ____ Turno: _______

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 7. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	**En proceso de logro**	**Bueno**	**Sobresaliente**
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente a la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Verifiqué y comparé distintos métodos de análisis gráfico de funciones trigonométricas, utilizando tecnología o diálogo con mis pares. (M3-C1)			
Elaboré conjeturas precisas sobre transformaciones trigonométricas y anticipa su efecto gráfico. (M2-C2)			
Sustenté ante mis pares el proceso seguido, así como los descubrimientos o conjeturas formuladas, a partir de la graficación y el análisis de funciones trigonométricas. (M2-C4)			

Coevaluación para el aprendizaje

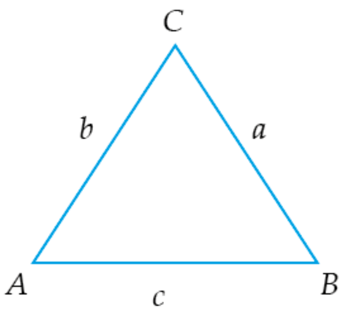
Solicita a un compañero del equipo que marque en la columna la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 7 y, que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	**En proceso de logro**	**Bueno**	**Sobresaliente**
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente a la retroalimentación de dudas de sus compañeros.			
Verificó y comparó distintos métodos de análisis gráfico de funciones trigonométricas, utilizando tecnología o diálogo con sus pares. (M3-C1)			
Elaboró conjeturas precisas sobre transformaciones trigonométricas y anticipa su efecto gráfico. (M2-C2)			
Sustentó ante sus pares el proceso seguido, así como los descubrimientos o conjeturas formuladas, a partir de la graficación y el análisis de funciones trigonométricas. (M2-C4)			

____

Nombre y firma de quien coevalúa

PA 8. Ley de senos y ley de cosenos

<table>
<tr><th rowspan="6">
</th><th colspan="2">Fórmulas</th><th>Lados y ángulos conocidos del triángulo</th><th>Calcular</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Ley del Seno</td><td>$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$</td><td>Dos lados y el ángulo opuesto a cualquiera de estos lados.</td><td>Un ángulo</td></tr>
<tr><td>$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$</td><td>Dos ángulos interiores y uno de sus lados.</td><td>Un lado</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Ley del Coseno</td><td>$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$</td><td rowspan="2">Dos lados y el ángulo comprendido</td><td rowspan="2">Un lado</td></tr>
<tr><td>$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$</td></tr>
<tr><td>$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$</td><td>Los tres lados</td><td>Un ángulo</td></tr>
</table>

Progresión de aprendizaje 8

Analiza las condiciones de aplicabilidad de la ley de senos y ley de cosenos y resuelve problemas que requieran su uso en situaciones geométricas y físicas.

<table>
<tr><th colspan="2">Metas de aprendizaje</th><th>En proceso de logro</th><th>Bueno</th><th>Sobresaliente</th></tr>
<tr><td rowspan="3">M4-C2 Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.</td><td>A</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>C</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>H</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">M2-C3 Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.</td><td>A</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>C</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>H</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">M3-C4 Organiza los procedimientos empleados en la solución de un problema a través de argumentos formales para someterlo a debate o evaluación.</td><td>A</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>C</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>H</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Evaluación diagnóstica 8.1

Analiza y selecciona la respuesta correcta a cada pregunta.

1. ¿Cuál es la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo?

   a) 90° b) 180° c) 360°

2. ¿Qué relación trigonométrica se define como el cociente entre el cateto opuesto y la hipotenusa en un triángulo rectángulo?

   a) Seno b) Coseno c) Tangente

3. En un triángulo, se sabe que un ángulo mide 45° y otro ángulo mide 62°. ¿Cuánto mide el tercer ángulo?

   a) 68° b) 73° c) 85°

4. Si tan $A = 1.6$, ¿cuál es el valor del ángulo A en grados?

   a) 55° b) 57.5° c) 58°

5. Si $\frac{3}{4} = \frac{15}{x}$, ¿cuál es el valor de x?

   a) 16 b) 18 c) 20

6. ¿Qué significa resolver un triángulo?

   a) Determinar la medida de al menos uno de sus lados.

   b) Encontrar la longitud de todos sus lados y la medida de todos sus ángulos.

   c) Comprobar si sus ángulos suman 180°.

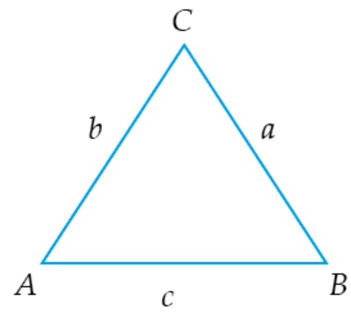
En la progresión de aprendizaje 6 utilizaste la trigonometría para resolver triángulos rectángulos (triángulos que tiene un ángulo de 90°) mediante las razones trigonométricas y el teorema de Pitágoras. Sin embargo, ¿qué pasa cuando se te presentan triángulos que no son rectángulos?

Los triángulos que no tienen un ángulo recto se llaman **triángulos oblicuángulos** y para resolverlos es necesario utilizar dos propiedades de la trigonometría: la **ley de senos** y la **ley de cosenos**. Estas relaciones permiten encontrar lados y ángulos desconocidos de un triángulo oblicuángulo conociendo cierta información como lo veras más adelante, lo que amplía las aplicaciones de la trigonometría más allá de los triángulos rectángulos.

Ley de los senos

La Ley de Senos establece una relación entre los lados y los senos de los ángulos opuestos en un triángulo. Se expresa matemáticamente como:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

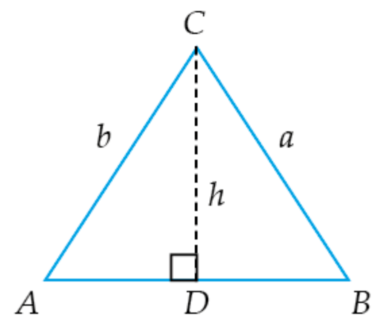


donde a, b y c son los lados del triángulo ΔABC, y A, B y C son los ángulos opuestos a dichos lados como se muestra en la figura de la derecha.

A continuación, **demuestra la ley de los senos** para que comprendas su origen y la relación fundamental entre los lados y ángulos de un triángulo oblicuángulo.

Para esta demostración considera el triángulo ΔABC que se mostró anteriormente.

Paso 1. En el triángulo ΔABC traza la altura $\overline{CD}$ correspondiente al vértice C. Se forman dos triángulos rectángulos: ΔADC y ΔBCD.



Paso 2. De los triángulos ΔADC y ΔBCD se deduce que:

$$\operatorname{sen} A = \frac{h}{b}, \text{ de donde, } h = b \cdot \operatorname{sen} A$$

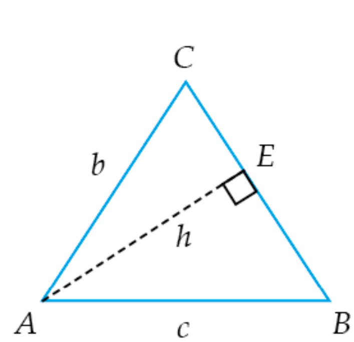
$$\operatorname{sen} B = \frac{h}{a}, \text{ de donde, } h = a \cdot \operatorname{sen} B$$

Igualando $h = b \cdot \operatorname{sen} A$ y $h = a \cdot \operatorname{sen} B$, se tiene que $b \cdot \operatorname{sen} A = a \cdot \operatorname{sen} B$.

Dividiendo entre ab a ambos lados de $b \cdot \operatorname{sen} A = a \cdot \operatorname{sen} B$, se tiene que

$$\frac{b \cdot \operatorname{sen} A}{ab} = \frac{a \cdot \operatorname{sen} B}{ab} \quad \longrightarrow \quad \frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b}$$

Paso 3. Ahora, traza la altura $\overline{AE}$ del triángulo ΔABC desde el vértice A. Se forman dos triángulos rectángulos: ΔABE y ΔCAE.



Paso 4. De los triángulos ΔABE y ΔCAE se deduce que:

$$\operatorname{sen} B = \frac{h}{c}, \text{ de donde, } h = c \cdot \operatorname{sen} B$$

$$\operatorname{sen} C = \frac{h}{b}, \text{ de donde, } h = b \cdot \operatorname{sen} C$$

Igualando $h = c \cdot \text{sen}\, B$ y $h = b \cdot \text{sen}\, C$, se tiene que $c \cdot \text{sen}\, B = b \cdot \text{sen}\, C$.

Dividiendo entre bc a ambos lados de $c \cdot \text{sen}\, B = b \cdot \text{sen}\, C$, se tiene que

$$\frac{c \cdot \text{sen}\, B}{bc} = \frac{b \cdot \text{sen}\, C}{bc} \quad \longrightarrow \quad \frac{\text{sen}\, B}{b} = \frac{\text{sen}\, C}{c}$$

Paso 5. Igualando los resultados $\frac{\text{sen}\, A}{a} = \frac{\text{sen}\, B}{b}$ y $\frac{\text{sen}\, B}{b} = \frac{\text{sen}\, C}{c}$, puedes establecer la ley de los senos

$$\frac{\text{sen}\, A}{a} = \frac{\text{sen}\, B}{b} = \frac{\text{sen}\, C}{c}.$$

En el código QR 8.1 encontrarás un video explicativo sobre la demostración de la ley de los senos.

QR 8.1. Demostración de la ley de los senos. Video de Math in Black.
Fuente: Parzibyte, 2025.

Ley de los senos
Dado un triángulo ΔABC, si a, b y c son las longitudes de los lados del triángulo y A, B y C son respectivamente los ángulos que se oponen a dichos lados, entonces se tiene la siguiente relación:

$$\frac{\text{sen}\, A}{a} = \frac{\text{sen}\, B}{b} = \frac{\text{sen}\, C}{c}, \text{ que también se escribe como } \frac{a}{\text{sen}\, A} = \frac{b}{\text{sen}\, B} = \frac{c}{\text{sen}\, C}.$$

Para resolver un triángulo oblicuángulo ΔABC utilizando la ley de los senos, necesitas conocer los siguientes elementos:

- Dos ángulos interiores del triángulo y uno de sus lados.
  Por ejemplo, si conoces los ángulos A y B y un lado opuesto a uno de ellos (a o b), puedes calcular el tercer ángulo C mediante la relación:
  $$C = 180° - (A + B).$$
  Luego, se usa la ley de los senos para calcular los lados restantes.

- Dos lados del triángulo y el ángulo opuesto a cualquiera de estos lados.
  Por ejemplo, si conoces el ángulo A, su lado opuesto a y otro lado cualquiera (b o c), puedes obtener el otro ángulo aplicando la ley de senos:

$$\frac{\text{sen}\, B}{b} = \frac{\text{sen}\, A}{a} \quad \longrightarrow \quad \text{sen}\, B = \frac{b \cdot \text{sen}\, A}{a} \quad \longrightarrow \quad B = \text{sen}^{-1}\left(\frac{b \cdot \text{sen}\, A}{a}\right)$$

Luego, se calcula el tercer ángulo mediante la relación: $C = 180° - (A + B)$ y se determina el lado restante con la ley de los senos.

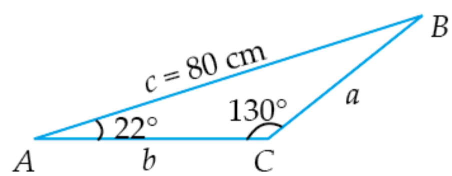
A continuación, resuelve triángulos oblicuángulos aplicando la ley de los senos. Recuerda que resolver un triángulo significa determinar el valor de todos sus elementos, es decir, calcular la medida de sus tres lados y tres ángulos a partir de la información dada.

Primero resuelve un triángulo en el que conoces dos ángulos interiores del triángulo y uno de sus lados un ángulo.

Ejemplo formativo 8.1

1. Resuelve el triángulo que se muestra en la siguiente figura.

Resolución



Calcula el tercer ángulo.

$$\begin{aligned} B &= 180° - (A + C) \\ &= 180° - (22° + 130°) \\ &= 28° \end{aligned}$$

$a \approx 39.12$ cm	$A = 22°$
$b \approx 49.03$ cm	$B = 28°$
$c = 80$ cm	$C = 130°$

Aplica la ley de los senos $\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$ para calcular el lado a, mediante $a = \frac{c \cdot \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C}$.

$$a = \frac{80 \cdot \operatorname{sen} 22°}{\operatorname{sen} 130°} \approx 39.12$$

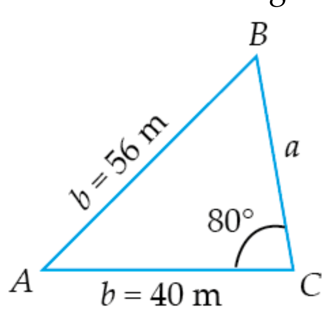
Usa la ley de los senos $\frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$ para calcular el lado b, mediante $b = \frac{c \cdot \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C}$.

$$b = \frac{80 \cdot \operatorname{sen} 28°}{\operatorname{sen} 130°} \approx 49.03$$

Ahora, resuelve un triángulo en el que conoces dos lados del triángulo y el ángulo opuesto a cualquiera de estos lados.

Ejemplo formativo 8.2

1. Resuelve el triángulo que se muestra en la siguiente figura.



Resolución

Calcula el ángulo B usando la ley de los senos

$$\frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}, \text{ de donde}$$

$a \approx 46.75$ m	$A = 55.3°$
$b = 40$ m	$B \approx 44.7°$
$c = 56$ m	$C = 80°$

$$B = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{b \cdot \operatorname{sen} C}{c}\right) = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{40 \cdot \operatorname{sen} 80°}{56}\right) \approx 44.7°$$

Calcula el tercer ángulo A mediante la relación:

$$A = 180° - (B + C) = 180° - (44.7° + 80°) = 55.3$$

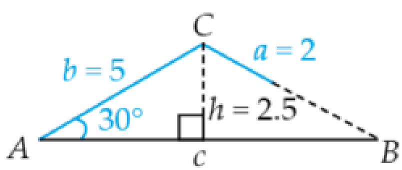
Aplica la ley de los senos $\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$ para calcular el lado a, mediante $a = \frac{c \cdot \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C}$.

$$a = \frac{56 \cdot \operatorname{sen} 55.3°}{\operatorname{sen} 80°} \approx 46.75$$

Al resolver un triángulo oblicuángulo utilizando la ley de los senos pueden surgir casos ambiguos cuando se conocen dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos, por ejemplo, si conoces un ángulo agudo A, su lado opuesto a y un lado adyacente b. Para identificar estos casos, aplica la ley de senos $\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$ y determina si:

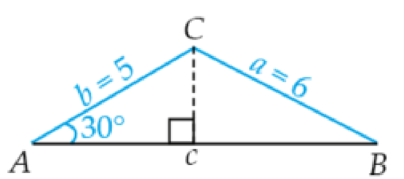
- **No existe el triángulo** si $a < b \cdot \operatorname{sen} A$. Es decir, Si a es menor que la altura ($h = b \cdot \operatorname{sen}\ A$), no es posible formar un triángulo.

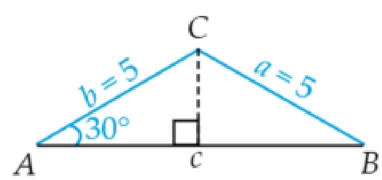
  Ejemplo:

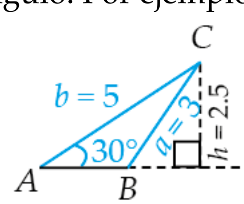
  $$h = 5 \cdot \operatorname{sen} 30° = 2.5$$

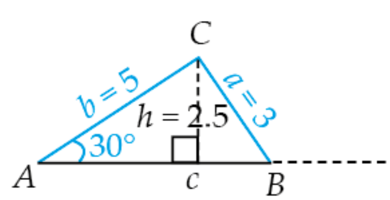
- **El triángulo es único** ($a = b \cdot \operatorname{sen} A$ o $a \geq b$). Si a es igual a la altura h, se forma un triángulo rectángulo único. Si $a \geq b$, se forma un único triángulo oblicuángulo. Por ejemplo:

- **Hay dos triángulos posibles** ($b \cdot \operatorname{sen} A < a < b$). Si a es mayor que la altura h pero menor que b, se pueden formar dos triángulos diferentes:
  - Uno en el que el lado a está en una posición más corta.
  - Otro en el que el lado a se proyecta más lejos formando un segundo triángulo. Por ejemplo:

$$\frac{\operatorname{sen} B}{5} = \frac{\operatorname{sen} 30°}{3} \quad \longrightarrow \quad \operatorname{sen} B = \frac{5 \cdot \operatorname{sen} 30°}{3} \quad \longrightarrow \quad B = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{5 \cdot \operatorname{sen} 30°}{3}\right)$$

$$B \approx 56.44°$$

Partiendo de las figuras anteriores, al aplicar la ley de los senos, la función seno da dos posibles valores para el ángulo B, ya que $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\,(180° - x)$, lo que lleva a dos soluciones distintas.

$$B \approx 56.44° \ \text{ y } \ B \approx 123.56°$$

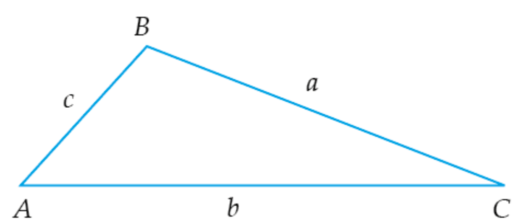
En esta progresión, al resolver un triángulo oblicuángulo ten en cuenta los tres casos mencionados anteriormente.

Ley de cosenos

En la resolución de triángulos oblicuángulos, la ley de los senos la usas cuando conoces dos ángulos interiores del triángulo y uno de sus lados, así como, cuando conoces dos lados del triángulo y el ángulo opuesto a cualquiera de estos lados. Sin embargo, existen situaciones en las que esta ley no es suficiente, especialmente cuando no conoces dicha correspondencia entre ángulos y lados. En estos casos puedes usar la ley de los cosenos que se expresa matemáticamente como:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

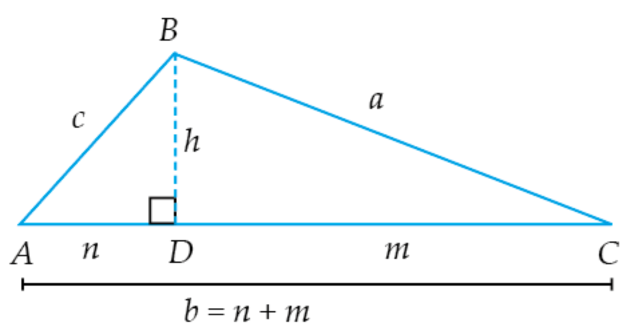
donde a, b y c son los lados del triángulo ΔABC, y A, B y C son los ángulos opuestos a dichos lados como se muestra en la figura de la derecha.



A continuación, demuestra la **ley de los cosenos** para que comprendas su origen y la relación entre los lados y ángulos de un triángulo oblicuángulo.

Para esta demostración, considera el triángulo ΔABC que se mostró anteriormente.

Paso 1. En el triángulo ΔABC traza la altura $\overline{BD}$ correspondiente al vértice B, donde $b = n + m$, es decir, $n = b - m$. Además, $\cos C = \frac{m}{a}$, de donde $m = a \cdot \cos C$.



Paso 2. Aplica el teorema de Pitágoras en los triángulos ΔBDA y ΔCDB, luego despeja el valor de h^2 en ambas ecuaciones obtenidas.

Del triángulo ΔBDA

$$c^2 = n^2 + h^2 \longrightarrow h^2 = c^2 - n^2$$

Del triángulo ΔCDB

$$a^2 = m^2 + h^2 \longrightarrow h^2 = a^2 - m^2$$

Iguala $h^2 = c^2 - n^2$ y $h^2 = a^2 - m^2$, para obtener que:

$$c^2 - n^2 = a^2 - m^2$$
$$c^2 = a^2 - m^2 + n^2$$
$$c^2 = a^2 - m^2 + (b-m)^2, \qquad \text{dado que } n = b - m$$
$$c^2 = a^2 - m^2 + b^2 - 2bm + m^2$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bm$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ba \cdot \cos C\,, \qquad \text{dado que } m = a \cdot \cos C$$

De manera análoga puedes demostrar que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ y que $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$.

En el código QR 8.2 encontrarás un video explicativo sobre la demostración de la ley de los cosenos.

QR 8.2. Demostración del teorema de Euclides y ley de los cosenos. Video de Math in Black.
Fuente: Parzibyte, 2025.

Ley de los cosenos
Dado un triángulo ΔABC, si a, b y c son las longitudes de los lados del triángulo y A denota la medida del ángulo comprendido entre los lados de longitud b y c, se tiene que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

Ley de los cosenos
Dado un triángulo ΔABC, si a, b y c son las longitudes de los lados del triángulo y B denota la medida del ángulo comprendido entre los lados de longitud a y c, se tiene que:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

Ley de los cosenos
Dado un triángulo ΔABC, si a, b y c son las longitudes de los lados del triángulo y C denota la medida del ángulo comprendido entre los lados de longitud a y b, se tiene que:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ba \cdot \cos C$$

Para resolver un triángulo oblicuángulo ΔABC utilizando la ley de los cosenos, es necesario que conozcas los siguientes elementos:

- Dos lados y el ángulo comprendido.
  Por ejemplo, si conoces los lados a y b del triángulo y el ángulo comprendido entre ellos (C), con la ley de cosenos puedes calcular el lado c mediante $c^2 = a^2 + b^2 - 2ba \cdot \cos C$.

  Luego, puedes calcular los ángulos restantes con la ley de los senos o la ley de los cosenos.

- Los tres lados del triángulo.
  Por ejemplo, si conoces los tres lados a, b y c del triángulo, con la ley de los cosenos puedes determinar los ángulos internos, uno por uno.

$$A = \cos^{-1}\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$$

$$B = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right)$$

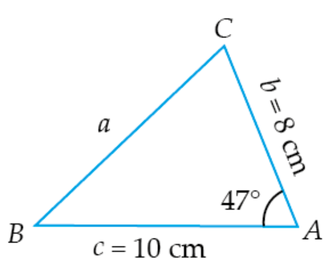
$$C = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)$$

A continuación, resuelve triángulos oblicuángulos aplicando la ley de los cosenos.

Primero resuelve un triángulo en el que conoces dos lados y el ángulo comprendido.

Ejemplo formativo 8.3

1. Resuelve el triángulo que se muestra en la siguiente figura.



Resolución

Calcula el lado a aplicando la ley de cosenos
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.

$a \approx 7.41$ cm	$A = 47°$
$b = 8$ cm	$B \approx 54.04°$
$c = 10$ cm	$C = 78.96°$

$$a^2 = 8^2 + 10^2 - 2(8)(10) \cdot \cos 47° \approx 64 + 100 - 109.12 \approx 54.88$$

Por lo que $a \approx 7.41$.

Calcula el ángulo B mediante $B = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right)$.

$$B = \cos^{-1}\left(\frac{(7.41)^2 + 10^2 - 8^2}{2(7.74)(10)}\right) \approx 54.04°$$

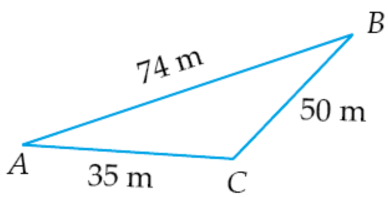
Calcula el tercer ángulo C mediante la relación:

$$C = 180° - (A + B) = 180° - (47° + 54.04°) = 78.96°$$

A continuación, resuelve un triángulo en el que conoces sus tres lados.

Ejemplo formativo 8.4

1. Resuelve el triángulo que se muestra en la siguiente figura.



Resolución

Calcula el ángulo A mediante

$A = \cos^{-1}\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$.

$a = 50$ m	$A \approx 35.81°$
$b = 35$ m	$B \approx 24.18°$
$c = 74$ m	$C \approx 120.01°$

$$A = \cos^{-1}\left(\frac{35^2 + 74^2 - 50^2}{2(35)(74)}\right) \approx 35.81°$$

Calcula el ángulo B mediante $B = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{b \cdot \operatorname{sen} A}{a}\right) = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{35 \cdot \operatorname{sen} 35.81°}{50}\right) \approx 24.18°$

Calcula el tercer ángulo C mediante la relación:

$$C = 180° - (A + B) = 180° - (35.81° + 24.18°) \approx 120.01°$$

Aplicación de la ley de los senos y de los cosenos

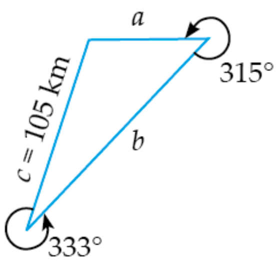
En diversas situaciones prácticas, como la navegación, la ingeniería, la arquitectura y la física, es común encontrar problemas que requieren determinar longitudes o ángulos en triángulos que no son rectángulos. Para abordar estos problemas, la ley de los senos y la ley de los cosenos permiten encontrar los elementos desconocidos de un triángulo oblicuángulo a partir de información parcial.

La resolución de problemas mediante estas leyes implica no solo la aplicación correcta de fórmulas, sino también el análisis del contexto y la selección de la estrategia más adecuada. A través de su uso, puedes modelar y resolver situaciones del mundo real, desarrollando así habilidades matemáticas aplicadas a distintos campos del conocimiento.

Ejemplo formativo 8.5

1. Una piloto partió del aeropuerto de la ciudad de Culiacán en un avión ligero y voló 105 kilómetros en línea recta hacia Guamúchil en aire en calma. Luego, giró 333° y se dirigió hacia el este durante un tiempo para dejar suministros en un pueblo aislado por una inundación. Después de la entrega, giró 315° para ir de regreso a Culiacán. Calcula la distancia recorrida por el piloto.

   Resolución



El ángulo $C = 360° - 315° = 45°$.

El ángulo $A = 360° - 333° = 27°$.

El ángulo $B = 180° - 45° - 27° = 108°$.

El lado $a = \frac{c \cdot \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C} = \frac{105 \cdot \operatorname{sen} 27°}{\operatorname{sen} 45°} \approx 67.41$.

El lado $b = \frac{c \cdot \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C} = \frac{105 \cdot \operatorname{sen} 108°}{\operatorname{sen} 45°} \approx 141.23$.

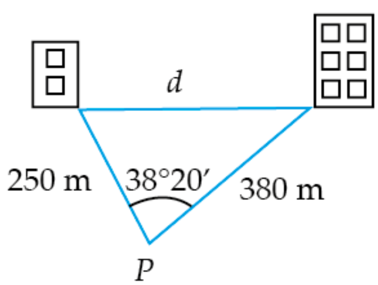
Luego $a + b + c = 67.41 + 141.23 + 105 \approx 313.64$

Por lo tanto, el piloto recorrió aproximadamente 313.64 km.

Ejemplo formativo 8.6

1. Un observador se encuentra en un punto P que dista de 2 edificios, 250 m y 380 m, respectivamente. Si el ángulo formado por los 2 edificios y el observador es 38° 20′, determina la distancia entre ambos edificios.

   Resolución



Tienes que $a = 250$ m, $b = 380$ m y $\angle P = 38°20'$.

Sea d la distancia entre ambos edificios, entonces, por la ley de los cosenos $d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos P$, de donde $d = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos P}$.Luego

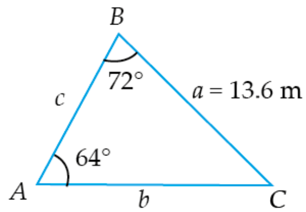
$$d = \sqrt{250^2 + 380^2 - 2(250)(380) \cdot \cos 38°20'} \approx 240.54$$

Por lo tanto, la distancia entre los edificios es aproximadamente de 240.54 m.

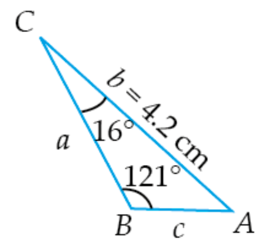
Evaluación formativa 8.1

1. Resuelve cada uno de los siguientes triángulos.

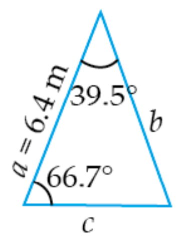
a)



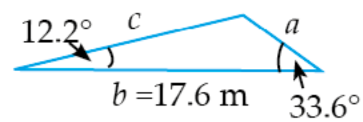
b)



c)



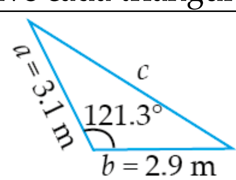
d)



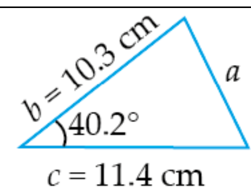
2. Resuelve, si es posible, un triángulo que se pueda formar con los elementos dados.
   a) $A = 10.3°, C = 143.7°, c = 48.3$ m
   b) $b = 5.7$ cm, $c = 8.6$ cm, $C = 125°$
   c) $a = 15, b = 25$ y $A = 80°$
   d) $a = 6, b = 7$ y $A = 30°$

3. Resuelve cada triángulo.

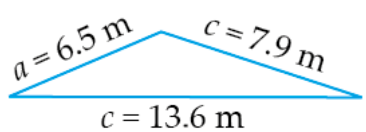
a)



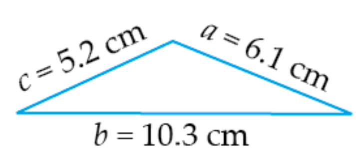
b)



c)



d)



4. Resuelve el triángulo que se pueda formar con las partes dadas.
   a) $a = 6.8$ m, $c = 2.4$ m, $B = 10.5°$
   b) $a = 30.4$ cm, $b = 28.9$ cm, $c = 31.6$ cm

5. Dos personas de frente y a 2,500 m una de otra en el mismo nivel horizontal, observan un avión con ángulos de elevación de 50°10′ y 65° 40′. Calcula la altura del avión.
6. Después de viajar 207 km en línea recta hacia el este, un bombardero recibe instrucciones para desviarse 12° hacia el sur y viajar 145 km en dicha dirección. ¿Qué tan lejos estará del punto de salida una vez que llegue a su objetivo?
7. Carlos y José están jugando fútbol soccer. Carlos está parado a 10 m de un poste de la portería y a 11.7 m del otro poste. José está parado a 6.5 m de un poste de la portería y a 8.5 m del otro poste. Si la distancia entre los dos postes es 7.32 m, ¿cuál jugador tiene un ángulo mayor para hacer un tiro hacia la portería?
8. Dos lanchas remolcan una embarcación más grande, jalándola en direcciones que forman entre sí un ángulo de 35°, con fuerzas de 3 y 5 toneladas respectivamente. La embarcación grande experimenta una fuerza en una sola dirección, llamada fuerza resultante. Calcular la magnitud y la dirección de la resultante.

Autoevaluación y coevaluación 8.1

Nombre: ______________________ Plantel: ___________ Grupo: ____ Turno: _______

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 8. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente a la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Justifiqué la aplicabilidad de la Ley de los Senos y la Ley de los Cosenos en la resolución de triángulos oblicuángulos mediante explicaciones matemáticas sólidas. (M4-C2)			
Plantee modelos matemáticos en problemas aplicados que requieran la Ley de los Senos o la Ley de los Cosenos, identificando los datos conocidos y las incógnitas. (M2-C3)			
Presenté los cálculos realizados con claridad, destacando el uso adecuado de fórmulas trigonométricas. (M3-C4)			

Coevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero del equipo que marque en la columna la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 8 y, que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente a la retroalimentación de dudas de sus compañeros.			
Justificó la aplicabilidad de la ley de los senos y la ley de los cosenos mediante explicaciones matemáticas sólidas. (M4-C2)			
Planteó modelos matemáticos en problemas aplicados que requieran la ley de los senos o la ley de los cosenos, identificando los datos conocidos y las incógnitas. (M2-C3)			
Presentó los cálculos realizados con claridad, destacando el uso adecuado de fórmulas trigonométricas. (M3-C4)			

____

Nombre y firma de quien coevalúa

Bibliografía consultada

A., Ylé, Juárez, J. A. y Vizcarra, F. (2018). *Cálculo diferencial por competencias para bachillerato.* Servicios Once Ríos Editores.

Cuéller. J. A. (2012). *Matemáticas II*. Mc Graw Hill.

Juárez, J. A., Ylé, A. y Flórez, A. (2019). *Matemáticas III. Geometría y trigonometría*. Servicios Once Ríos Editores.

Juárez, J. A., Ylé, A. y Flórez, A. (2020). *Matemáticas IV. Funciones y geometría analítica*. Servicios Once Ríos Editores.

SEP (2023a). *Acuerdo número 09/08/23 por el que se establece y regula el Marco Curricular Común de la Educación Media Superior*. Diario Oficial de la Federación.

SEP (2023b). *Orientaciones Pedagógicas del recurso sociocognitivo pensamiento matemático*. SEMS.

SEP (2023c). *Progresiones de aprendizaje del recurso sociocognitivo pensamiento matemático*. SEMS.

Referencia a las fuentes de consulta de códigos QR

QR 1.1. Demostración de la suma de los ángulos interiores de un triángulo. Video de math2me. https://youtu.be/8o1AElzZ-MI
Fuente: Parzibyte, 2025.

QR 2.1. Figuras semejantes. Video del profe Daniel Carrión. https://youtu.be/4MxChkgm370
Fuente: Parzibyte, 2025.

QR 3.2. Semejanza de triángulos. Video de Susi Profe.
https://youtu.be/U4MTmLvvKQ4
Fuente: Parzibyte, 2025.

QR 2.3. Semejanza de triángulos. Video del profe Johan. https://www.youtube.com/shorts/GzbReQA3vHg?feature=share
Fuente: Parzibyte, 2025.

QR 2.4. Criterio de semejanza de triángulos LLL. Video Matemáticas con José Fernando. https://youtu.be/l55ksnsw6o0
Fuente: Parzibyte, 2025.

QR 2.5. Congruencia y semejanza de triángulos. Video de math2me. https://youtu.be/XYBOp1uDgAU?list=PLEwR-RTQiRPVAwJ5VHsrs9_NXRc7mLSLZ
Fuente: Parzibyte, 2025.

QR 2.6. Semejanza de triángulos problemas. Video de APRENDE+. https://youtu.be/oJgduuu1Gw0

Fuente: Parzibyte, 2025.

QR 3.1. El teorema de Tales |Introducción. Video del profe Alex: https://youtu.be/JGyYSzhCxFA
Fuente: Parzibyte, 2025.

QR 3.2. El teorema de Tales |Ejercicio de aplicación 2. Video del profe Alex: https://youtu.be/T5Bn8024LuQ
Fuente: Parzibyte, 2025.

QR 3.3. El teorema de Tales. Video del profesor Carreón: https://youtu.be/staL7w-eT58
Fuente: Parzibyte, 2025.

QR 3.4. El teorema de Tales| Ejercicio de aplicación 5. Video del profesor Alex. https://youtu.be/aLY4xGsvEzg?list=PLeySRPnY35dH-NCjJyBuRXeI5JuJtEpVn
Fuente: Parzibyte, 2025.

QR 4.1. Uso correcto de la calculadora para calcular razones trigonométricas. Video del profe Alex. https://youtu.be/4mpKZMrFauw
Fuente: Parzibyte, 2025.

QR 4.2. Racionalización de denominadore. Video del profe Alex. https://youtu.be/me-eIy0t9hU
Fuente: Parzibyte, 2025.

QR 5.1. Determinar la hipotenusa en un triángulo rectángulo. Video del profe Alex. https://youtu.be/2UbdPiqAiHY
Fuente: Parzibyte, 2025.

QR 5.2. Determinar un cateto en un triángulo rectángulo. Video del profe Alex. https://youtu.be/CJ8bpjhwA2k
Fuente: Parzibyte, 2025.

QR 5.3. Determinar un ángulo en un triángulo rectángulo. Video del profe Alex. https://youtu.be/VrDR_R_S0iM
Fuente: Parzibyte, 2025.

QR 5.4. Determinar un ángulo en un triángulo rectángulo. Video del profe Alex. https://youtu.be/nGS1glnproM
Fuente: Parzibyte, 2025.

QR 6.1. Aplicaciones de la trigonometría. Video de 1000ton Cesar.
Fuente: Parzibyte, 2025.

QR 6.2. Ángulo de elevación y de depresión. Video del profe Alex. https://youtu.be/tnZIseqFP60
Fuente: Parzibyte, 2025.

QR 6.3. Ejemplo donde se usa el ángulo de elevación. Video del profe Alex. https://youtu.be/D8_VzxGvOuE?list=PLeySRPnY35dEAIFYvOhtD2cztVuq15qw1
Fuente: Parzibyte, 2025.

QR 7.1. Gráfica del seno y del coseno sin calculadora. Video del profe Alex. https://youtu.be/SNccJDUsu-A
Fuente: Parzibyte, 2025.

QR 7.2. Demostración de que $\operatorname{sen}(-x) = -\sin x$. Video Gustavo Magallanes-Guijón. https://youtu.be/5KrMWrd9EEc
Fuente: Parzibyte, 2025.

QR 8.1. Demostración de la ley de los senos. Video de Math in Black. https://youtu.be/OVsS59y7IJ0
Fuente: Parzibyte, 2025.

QR 8.2. Demostración del teorema de Euclides y ley de los cosenos. Video de Math in Black. https://youtu.be/fVkBThbYVTY
Fuente: Parzibyte, 2025.